Exercice

Soit $a > 0$ un réel strictement positif.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t \neq [0,1[\end{cases}$$

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge et donner sa valeur.

   (b) Montrer que f est une densité de probabilité.

2. On considère à présent X une variable aléatoire admettant f comme densité, et on note F sa fonction de répartition. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.

3. On pose $Y = -\ln(1-X)$ et on note G la fonction de répartition de Y.

   (a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et calculer $G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la loi de Y ?

   (b) Pour tout réel $\lambda > 0$, montrer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

   et déterminer sa valeur.

   (c) Montrer que e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a. En déduire que X possède une espérance qu'on calculera.

   (d) Montrer que e^{-2Y} possède une espérance, et que cette espérance vaut $\dfrac{a}{a+2}$. En déduire la variance de e^{-Y}, puis la variance de X.