Ecricome 2001 - Problème 1

L'entier n étant strictement positif, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad a_n = S_n - \ln(n), \qquad b_n = a_{n+1} - a_n$$

1. (a) Montrer que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n > 0$, et pour tout réel $t \leqslant n$, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.
2. On veut montrer que pour tout t de $[0, n]$,
$$(I) : \qquad 0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}$$
   (a) Étudier les variations de la fonction $h : [0, \sqrt{n}] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$h(t) = t + n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$$
   (b) En déduire que les inégalités (I) sont vraies pour $t \in [0, \sqrt{n}[$.
   (c) Montrer qu'elles le sont encore sur $[\sqrt{n}, n]$.
3. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt$.
   (a) Justifier l'existence de cette intégrale.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
4. (a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt$ en fonction de S_n.
   (b) En utilisant une factorisation de $1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$, montrer que :
$$J_n = \int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt = S_n.$$
5. (a) Donner le développement limité en $\frac{1}{n}$, à l'ordre 2, de b_n, quand n tend vers l'infini ; en déduire la nature de la série $\sum b_n$.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge ; on désignera par α la limite, que l'on ne cherchera pas à calculer, de la suite $(a_n)_n$.
6. (a) Justifier l'existence des deux intégrales :
$$K = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad L = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$
   (b) En étudiant l'expression $J_n - I_n$, montrer que $K - L = \alpha$.
7. Prouver la convergence et exprimer en fonction de α la valeur de l'intégrale
$$M = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt$$
8. (a) Pour $x > 0$, montrer que
$$\int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \alpha + \ln(x) + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln(x) \right) = -\alpha$.
9. Après en avoir prouvé la convergence, calculer l'intégrale :
$$N = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt.$$
10. Pour a et b strictement positifs, justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$$