Exercice

On note pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}, \qquad f_n(x) = \frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}$$

1. Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ et étudier leur signe.
2. Montrer la convergence de $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)dt$
3. Montrer à l'aide d'un changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ qu'on a : $K = -\displaystyle\int_0^1 h(u)du$.
4. En déduire la convergence et la valeur des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(t)|dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)dt$.
5. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.
6. Montrer que $\forall x > 0,\ h(x) - f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2}$
7. En déduire successivement les inégalités suivantes :
$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(t) - f_n(t))\,dt \leqslant \frac{K}{n+1}$$
$$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(t) - f_n(t))\,dt \leqslant 0$$
8. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 0$.