

## Exercice 1 (HEC 2008 - Problème 2 (Partie 1))

1. (a) Montrer que pour tout réel  $x$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  est convergente.
- (b) Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$  est convergente si et seulement si le réel  $x$  est strictement positif.
- (c) En déduire que la fonction Gamma,  $\Gamma$ , définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

a pour domaine de définition  $\mathbb{R}^{+*}$ .

2. Etablir, pour tout réel  $x$  strictement positif, l'égalité suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. (a) Calculer  $\Gamma(1)$
- (b) Montrer que :  $\forall n \geq 1, \Gamma(n) = (n-1)!$

## Exercice 2

Blanche-Neige, les Sept Nains et le Prince Charmant jouent aux dés. Chaque joueur, sauf le Prince, possède un dé cubique et non truqué. Le dé de Blanche-Neige est classique, c'est-à-dire que ses faces sont numérotées de 1 à 6. Les sept dés des nains, notés  $D_1, D_2, \dots, D_7$ , sont au contraire particuliers : pour chaque  $i \in \llbracket 1, 7 \rrbracket$ , le dé  $D_i$  possède  $i-1$  faces blanches et  $7-i$  faces noires (par exemple, le dé  $D_3$ , contient 2 faces blanches et 4 faces noires).

Le jeu se déroule en deux étapes. Le Prince Charmant n'assiste qu'à la seconde partie du jeu.

Dans la première partie du jeu, Blanche-Neige lance son dé pour désigner

le nain qui jouera dans la seconde moitié du jeu. Si le résultat de son lancer est 2, 3, 4, 5 ou 6, on choisit le numéro sorti. Si le résultat du lancer est 1, Blanche-Neige relance son dé. Si le nouveau résultat est 1, 2 ou 3, on choisit le numéro 1, sinon on choisit le numéro 7.

Dans la seconde partie du jeu, seul le nain dont le dé a été désigné par Blanche-Neige joue. Il lance son dé plusieurs fois de suite, de manière indépendante. Le Prince Charmant, qui ignore le numéro du dé utilisé par le nain compte les faces noires qui apparaissent.

1. Rappeler les noms des Sept Nains.
2. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au numéro du dé désigné par Blanche-Neige. Déterminer la loi de  $X$ .
3. Pour tout  $k \geq 1$ , calculer la probabilité qu'à la seconde étape le nain n'obtienne que des faces noires aux  $k$  premiers essais.
4. Calculer la probabilité que lors de la seconde étape, le nain n'obtienne jamais de face noire.
5. Le Prince Charmant constate qu'il est sorti une face noire au premier et au deuxième lancer. Calculer la probabilité qu'il sorte une face noire au troisième lancer.
6. Le Prince constate qu'au bout de 3 lancers, il n'a pu observer que des faces blanches. Quelle est la probabilité que ce soit le dé  $D_7$  qui ait été choisi ?
7. Puisqu'elle s'ennuie une fois son dé lancé, Blanche-Neige s'attaque au panier de cinq pommes qui lui a été apporté par la méchante reine, déguisée en pauvre vieille. Le panier contient cinq pommes bien rouges, mais une est empoisonnée et deux sont véreuses. Blanche-Neige prend les pommes une par une pour les croquer. Si elle tombe sur une pomme véreuse, elle jette le reste du panier au cochon, sinon elle continue.
  - (a) Calculer la probabilité que le cochon trépasse.
  - (b) Calculer la probabilité que Blanche-Neige mange toutes les pommes.