

HEC 2005 - Exercice 2

Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par la relation suivante :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}$$

1. Montrer que $f(x)$ a un sens pour tout x strictement positif.
2. Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et calculer sa dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
3. Étudier les variations de la fonction f .
4. (a) Calculer, pour $x > 0$, $\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$.
(b) Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} \left(\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \right) = 0$.
(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$.
(d) Montrer que f admet une limite quand x tend vers $+\infty$, et que cette limite est $\ln(2)$.
5. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur \mathbb{R}^+ . Ce prolongement est-il dérivable à droite en 0 ?
6. Donner l'allure de la représentation graphique de f , le plan étant rapporté à un repère orthonormé.