

Exercice

Deux joueurs A et B possèdent chacun une pièce truquée de manière similaire, faisant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec une probabilité $q = 1 - p$.

Ils réalisent chacun une succession de lancers avec leur pièce, indépendamment l'un de l'autre, et on note X (respectivement Y) le numéro du lancer où A (resp. B) obtient pour la première fois un Pile.

On note alors $I = \inf(X, Y)$ et $S = \sup(X, Y)$.

1. (a) Rappeler la loi de X et Y .
(b) Calculer $\mathbb{P}(I > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(c) En déduire que I suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
2. (a) Donner sans calcul la valeur de $\mathbb{E}[I]$.
(b) En remarquant que $I + S = X + Y$, calculer $\mathbb{E}[S]$.
(c) Que vaut $I \times S$? En déduire la valeur de $\text{cov}(I, S)$.
3. On définit $D = S - I$.
(a) Déterminer la loi du couple (I, D) .
(b) En déduire la loi de D .
(c) Montrer que I et D sont indépendantes.
(d) Retrouver alors la valeur de $\text{cov}(I, S)$.