Exercice 1 - ESSEC 2005

L'épreuve d'ESSEC 2005 comportait cet exercice et un long problème de probabilités-statistiques.
Durée recommandée pour cet exercice : 1h-1h30.

On considère un espace vectoriel réel E de dimension 2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Un endomorphisme f de E est dit *cyclique d'ordre* n s'il existe une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de vecteurs distincts de E, qui engendre E et tels que $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$, $\ldots$, $f(x_{n-1}) = x_n$, $f(x_n) = x_1$. On dit alors que $(x_1, \ldots, x_n)$ est un cycle d'ordre n pour f.

1. Un exemple.
   Dans cette question, l'endomorphisme f est défini par
   $$\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 \end{cases}$$
   Déterminer un cycle de f de premier vecteur $x_1 = -e_1 + e_2$. Quel est son ordre ?

On revient désormais au cas général ; on suppose que f est cyclique d'ordre n et que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un cycle d'ordre n de f.

2. Montrer que deux vecteurs consécutifs du cycle forment une base de E.
3. Pour tout entier naturel m, on définit f^m par récurrence : $f^0 = Id$, où Id représente l'endomorphisme identité de E et pour tout $k \geqslant 1$, $f^k = f^{k-1} \circ f$.
   (a) Montrer que $f^n = Id$.
   (b) Montrer que si m est un entier tel que $0 < m < n$, alors $f^m \neq Id$.
4. Soit x un vecteur non nul de E, qui n'est pas un vecteur propre de f. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est un cycle d'ordre n de f.
5. Peut-il exister un scalaire λ tel que $f = \lambda Id$?
6. (a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à f s'écrit
   $$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$
   (b) Montrer que $f^2 = aId + bf$.
7. Montrer que les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - bx - a$.
8. En utilisant la question 3, montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.
9. (a) On suppose que le polynôme P admet deux racines réelles distinctes. Caractériser f.
   (b) Exprimer, pour tout entier $k \geqslant 1$, f^k en fonction de f et Id.
10. Montrer que le polynôme P ne peut admettre une unique racine réelle.
11. On suppose dans cette question que P admet deux racines complexes.
    (a) Montrer que ces racines sont de la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-\theta}$, avec $\theta = \dfrac{2k_0\pi}{n}$, et k_0 un entier de $[\![0, n-1]\!]$.
    (b) Montrer que $f^2 = 2\cos(\theta) f - Id$.
    (c) Exprimer, pour tout entier naturel m, f^m en fonction de f et Id.

Exercice 2 - ESSEC 2011 Problème 1 (début)

L'épreuve d'ESSEC 2011 comportait ce problème (qui comportait une troisième partie), ainsi qu'un deuxième problème, plus long, mêlant algèbre et probabilités.
Durée recommandée pour cet exercice : 1h.

Dans tous ce problème, on note, pour n entier naturel non nul :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/5}}$$

Partie 1 - Résultats préliminaires

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{1/5}}$ est divergente.
   Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$?
2. Soit α un réel strictement positif. Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $(n+1)^\alpha - n^\alpha$.
3. En déduire des valeurs de α et β réels tels que :

$$\frac{1}{n^{1/5}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta\left((n+1)^\alpha - n^\alpha\right)$$

Partie 2 - Un équivalent de S_n

Dans cette partie, on désigne par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites à valeurs réelles strictement positives équivalentes en $+\infty$.
On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

4. Que peut-on dire de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$?

Dans la suite de cette partie, ε désigne un réel strictement positif.

5. Justifier qu'il existe N entier avec $N \geqslant 1$ tel que si $k \geqslant N$,

$$(1-\varepsilon)u_k \leqslant v_k \leqslant (1+\varepsilon)u_k$$

6. En déduire que si $n \geqslant N$,

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} v_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} u_k$$

7. Montrer que $\sum_{k=N}^{n} u_k$ est équivalent à $\sum_{k=N}^{n} v_k$ lorsque n tend vers $+\infty$.
8. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} u_k$ est équivalent à $\sum_{k=1}^{n} v_k$ lorsque n tend vers $+\infty$.
9. Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercices 3 et plus

Vous pouvez rédiger tout exercice tombé en khôlle durant les semaines 1 à 6. Vous aurez alors une correction détaillée en retour.