EDHEC 1997 Voie E Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$, où p désigne un entier naturel fixé.

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$, la série de terme général u_n diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.
   (b) En déduire par récurrence sur n que
   $$S_n = \frac{1}{p-1}\left(1 - (n+p+1)u_{n-1}\right)$$
3. (a) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
   (c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.
4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.
   (a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n}$.
   (b) En déduire une contradiction avec la troisième question.
5. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.