Oral ENS 2006 - Planche 06-B

Soit (u_n) une suite de réels tous strictements plus grands que -1.

Lorsque la suite (p_n) des produits

$$p_n = (1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)$$

converge, on note

$$p = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n)$$

sa limite. On dit alors que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge vers p.

1. Déterminer p lorsque $u_n = -1 + \dfrac{1}{n+1}$
2. On suppose, dans cette question seulement, que tous les u_n sont positifs.
   Encadrer p_n en fonction de S_n, où $S_n = u_1 + \cdots + u_n$, et en déduire que le produit $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ est une série convergente.
3. Montrer dans le cas général qu'une condition nécessaire de convergence de $\prod(1+u_n)$ vers $p > 0$ est que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Soit $p > 0$. Montrer que $\prod(1+u_n)$ converge vers p si et seulement si la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge.
   Quand tous les u_n sont positifs, montrer que $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature.
5. En général cependant, montrer que $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum u_n$ sont de natures différentes en traitant par exemple le cas $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.