Exercice : Suites récurrentes linéaires doubles

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ fixés. On note

$$\mathcal{S}_{a,b} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_{a,b}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On pose l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{a,b} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$.
   (a) Montrer que φ est linéaire
   (b) Montrer que φ est bijective.
   (c) En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_{a,b}$.
3. Soit $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ et de premier terme 1. Montrer que

$$(q^n) \in \mathcal{S}_{a,b} \Longleftrightarrow q^2 = aq + b$$

On note $(*)$ l'équation : $\boxed{x^2 = ax + b}$.

4. On suppose que $(*)$ admette deux racines distinctes réelles q_1 et q_2.
   (a) Montrer que $\left((q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme une base de $\mathcal{S}_{a,b}$.
   (b) En déduire la forme de toute suite étant dans $\mathcal{S}_{a,b}$ dans ce cas.
5. On suppose que $(*)$ admette une unique racine q_0.
   (a) Montrer que la suite $(n(q_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{S}_{a,b}$.
   (b) Montrer que $\left((q_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n(q_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme une base de $\mathcal{S}_{a,b}$.
   (c) En déduire la forme de toute suite étant dans $\mathcal{S}_{a,b}$ dans ce cas.