ENS 2008 - Exercice 1

On considère dans cet exercice un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, de dimension $n \in [\![1, 4]\!]$, et on cherche à caractériser les endomorphismes u de E tels que $\boxed{u \circ u = -Id_E}$ où Id_E désigne l'application identité de E. On utilisera la notation $u^2 = u \circ u$.

1. Soit u tel que $u^2 = -Id_E$. Quelles sont les valeurs propres de u^2 ? L'endomorphisme u admet-il des valeurs propres ?
2. Lorsque $n = 1$, montrer que tout endomorphisme de E est de la forme λId_E, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme u tel que $u^2 = -Id_E$ dans ce cas.
3. On considère dans cette question le cas $n \in \{2, 3, 4\}$ et on suppose, pour commencer, qu'il existe un endomorphisme u tel que $u^2 = -Id_E$. Soit un élément x de E, non nul : montrer que $(x, u(x))$ forme un système libre.
   On pourra par exemple considérer deux réels λ, μ tels que $\lambda x + \mu u(x) = 0$ et en tirer que $\lambda^2 + \mu^2 = 0$.
4. En déduire, lorsque $n = 2$, une représentation matricielle de tout u qui vérifie $u^2 = -Id_E$; et préciser alors tous les endomorphismes u tels que $u^2 = -Id_E$.
5. On passe ici au cas $n = 4$.
   (a) On suppose à nouveau, pour commencer, qu'il existe u tel que $u^2 = -Id_E$ et on considère un élément x de E, non nul. Montrer qu'il existe un élément y de E tel que $(x, u(x), y, u(y))$ forme une base de E.
   (b) Préciser alors tous les endomorphismes u tels que $u^2 = -Id_E$.
6. Montrer que si pour $n = 3$, il existait un endomorphisme u sur E tel que $u^2 = -Id_E$, alors il existerait un système libre à quatre éléments dans E. En déduire qu'il n'existe donc pas de tel endomorphisme.