ECRICOME 2008 - Problème 1 (début)

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour a, b, c réels, on pose : $M_{a,b,c} = aA + bB + cC$.
Enfin, on note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (A, B, C)$.

1. Prouver que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{F}$.
   Quelle est la dimension de $\mathcal{F}$?
2. Montrer que la matrice B^2 appartient à $\mathcal{F}$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

On considère dans la suite les matrices suivantes :

$$\begin{cases} M_1 = A - B - C \\ M_2 = 2A - B - 2C \\ M_3 = A \end{cases}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (M_1, M_2, M_3)$ est une base de $\mathcal{F}$.
4. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Déterminer son inverse P^{-1}.
5. Calculer les produits matriciels suivants :

$$M_1M_2, \quad M_2M_1, \quad M_3M_2, \quad M_2M_3, \quad M_1M_3, \quad M_3M_1.$$

6. Démontrer que pour tout entier naturel k non nul :

$$M_1^k = M_1, \quad M_2^k = M_2, \quad M_3^k = M_3$$

7. Prouver que le produit de deux éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.
8. On pose $M_{a,b,c} = xM_1 + yM_2 + zM_3$. Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.