ENSAI 2010 - Exercice 1

Dans tout l'exercice, on travaille dans l'espace vectoriel usuel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme associé à la matrice A, dans la base $\mathcal{B}_0$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f et donner pour chacun de ces deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ une base ainsi que sa dimension.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.
3. Calculer A^2 et exprimer le résultat en fonction de A. En déduire pour $n \geqslant 1$, A^n en fonction de n et A.
4. Déterminer, en utilisant la question précédente, une relation entre B^2, B et la matrice identité de dimension 3. En déduire que la matrice B est inversible et calculer son inverse.
5. Calculer B^n pour $n \geqslant 1$

---

6. ***Pour les khûbes seulement !***
   La matrice B est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? (où $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels). Déterminer, si c'est possible, une base propre associée à B.