CHAPITRE 12

Variables aléatoires à densité

12.1 Notion de variable aléatoire à densité

12.1.1 Rappels

Définition 1
Une **variable aléatoire réelle** (abrégé en VAR) est une application

$$X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$$

où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Remarque :

> Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble discret, on dit que X est une VAR discrète.

Définition 2
Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, discrète ou non. On appelle **fonction de répartition de X**, notée F_X, la fonction définie par :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array}$$

12.1.2 Densité

Définition 3
Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit F_X sa fonction de répartition. On dit que X est une **variable aléatoire réelle à densité** s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) f_X est à valeurs positives ou nulles,

(ii) f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points,

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

La fonction f_X s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X.

Remarques :

- **R 1** – Une variable X peut avoir plusieurs densités : c'est pourquoi on dit toujours UNE densité de X. Par exemple, si g est une fonction égale à f_X sauf en un nombre fini de points, alors g est aussi une densité de la variable X.
- **R 2** – Une variable X cependant n'admet toujours qu'une seule fonction de répartition : c'est LA fonction de répartition de X

Théorème 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

(i) f est à valeurs positives ou nulles,

(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points,

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$,

alors f est appelée une ***densité de probabilité****.*
En effet, il existe alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une VAR X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, tels que f soit une densité de la variable X.

Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrons que f est une densité de probabilité.

- On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc la fonction f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
- Sur $]-\infty, 0[$, $f \equiv 0$, donc f est continue sur $]-\infty, 0[$.
  Sur $[0, +\infty[$, f est la composée de $x \mapsto -x$ et $u \mapsto e^u$ qui sont continues dans f est continue sur $[0, +\infty[$
  Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$: f non continue en 0.
  Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (donc sur $\mathbb{R}$ sauf en un point : ok !)
- Vérifions que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge :
  $f \equiv 0$ sur $]-\infty, 0[$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge et vaut 0.
  Sur $[0, +\infty[$, la fonction f est continue, il y a un problème en $+\infty$.
  Soit $A > 0$, alors
  $$\int_0^A f(t)dt = \int_0^A e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^A = 1 - e^{-A}$$
  donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)dx = 1$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

En conclusion, on a bien montré que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.
f est donc bien une densité de probabilité.

12.1.3 Fonction de répartition

Théorème 5
Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X, et si f est une densité de X, alors :
- *F est continue sur $\mathbb{R}$*
- *F est de classe $\mathcal{C}^1$, sauf éventuellement en un nombre fini de points*
- *En tout point x où F est dérivable, on a $F'(x) = f(x)$*

Remarques :

R 1 – Les variables discrètes ne sont pas des variables à densité : leur fonction de répartition est en escalier, donc pas continue.

R 2 – La fonction de répartition est une primitive de la densité.

R 3 – Comme f est positive, la fonction de répartition est bien croissante.

Théorème 6
Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Si :
(i) F est continue sur $\mathbb{R}$
(ii) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
alors X est une variable aléatoire à densité.

De plus, si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple :

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Montrons que X est une variable aléatoire à densité, et déterminons une densité de X.

- Sur $]-\infty, 2[$, F est une fonction constante, donc continue.
  Sur $]2, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{8}{x^3}$ est continue, donc F est continue sur cet intervalle.
  De plus, $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} F(x) = 1 - \frac{8}{8} = 0 = F(2)$.
  On a donc bien F continue sur $\mathbb{R}$.
- Sur $]-\infty, 2[$, F est une fonction constante, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Sur $]2, +\infty[$, la fonction $x\dfrac{8}{x^3}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et

$$\forall x \neq 2, \quad F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{24}{x^4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

X est donc bien une variable à densité et une densité de X est par exemple la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \frac{24}{x^4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Il suffit de rajouter une valeur en $x = 2$).

Théorème 7

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si F vérifie les propriétés suivantes :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$

(iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(v) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et il existe une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont F est la fonction de répartition.

De plus, X est alors une variable aléatoire à densité, et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple :

Considérons la fonction F définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ \dfrac{1 - \sqrt{-x}}{2} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ?

- Sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, F est constante ou composée de fonctions usuelles continues, donc continue. De plus

$$\lim_{x \to -1^-} F(x) = \lim_{x \to -1^+} F(x) = 0 = F(-1)$$

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \frac{1}{2} = F(0)$$

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^+} F(x) = 1 = F(1)$$

  Donc F est bien continue sur $\mathbb{R}$.
- Sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et sur cet ensemble :

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ \dfrac{1}{4\sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-1, 0[\\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

- Aux points où F est dérivable, on voit que $F'(x) \geqslant 0$ et comme F est continue, F est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

- On a facilement $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
- De même, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Ainsi, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Une densité de X est par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{|x|}} & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

12.1.4 Propriétés

Proposition 8

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

1. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X \geqslant x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)dt$$

3. *Pour tous réels $a \leqslant b$,*

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$$

Remarques :

R 1 – On a ici pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$ contrairement aux variables aléatoires discrètes. Quand on demande de "donner la loi de X", il ne s'agira donc pas de calculer $\mathbb{P}(X = x)$. Il faudra plutôt :
- soit donner LA fonction de répartition de X
- soit donner UNE densité de X

R 2 – La probabilité $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$ peut donc être représentée comme l'aire de la partie du plan située en dessous de la courbe représentative de la densité f, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

R 3 – Cas particulier : si X est une variable à densité et f est une densité de X, si $f \equiv 0$ en dehors d'un intervalle $[a, b]$, alors $\mathbb{P}(X < a) = 0$ et $\mathbb{P}(X > b) = 0$.
On dit que **X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a, b]$**, c'est une variable à densité **à support borné**.

Définition 9

Des variables aléatoires à densité $X_1, \dots, X_n$ sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dites **indépendantes** si, pour tous réels $x_1, \dots, x_n$:

$$\mathbb{P}\left((X_1 \leqslant x_1) \cap (X_2 \leqslant x_2) \cap \ldots \cap (X_n \leqslant x_n)\right) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1)\mathbb{P}(X_2 \leqslant x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n \leqslant x_n)$$

autrement dit,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1} n(X_k \leqslant x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leqslant x_k)$$

Remarque :

> Pour montrer par exemple que deux variables aléatoires à densité X et Y sont indépendantes, il faut montrer que
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y)$$

12.2 Fonctions d'une variable aléatoire à densité

Lorsqu'on a une variable à densité X, il est utile de savoir déterminer pour des fonctions g simples si la variable $g(X)$ est encore une variable à densité, et de déterminer alors une densité de $g(X)$.
Les différents résultats de cette partie ne sont que des exemples, rien est à retenir, il faudra savoir les refaire à chaque fois.

12.2.1 Fonction linéaire

Proposition 10
Soit X une variable aléatoire de densité f et soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
Alors, la variable aléatoire $Y = aX + b$ est encore une variable aléatoire à densité. De plus, une densité de Y est
$$g : x \longmapsto \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Démonstration :

On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y. Essayons d'exprimer la fonction G en fonction de F.
Par définition, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) &= \mathbb{P}(aX + b \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(aX \leqslant x - b) \end{aligned}$$
On veut "passer" le a de l'autre côté : il y a donc deux cas.

- Si $a > 0$, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$$
- Si $a < 0$, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Vérifions donc que G satisfait les hypothèses voulues pour être la fonction de répartition d'une variable à densité :

- Si $a > 0$ ou si $a < 0$, la fonction G est toujours continue sur $\mathbb{R}$, car F est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x-b}{a}$ également.
- Si on note $x_1, \ldots, x_n$ les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = ax_i + b$, on voit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Ainsi, on sait que Y est bien une variable aléatoire à densité.
Déterminons une densité de la variable Y. Il nous faut donc calculer pour cela G'. En tout point x où G est dérivable, on a :

- Si $a > 0$, alors
$$G'(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$
- Si $a < 0$, alors
$$G'(x) = -\frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

(où f désigne une densité de X).
Ainsi, en posant par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

on a obtenu une densité de la variable Y.

12.2.2 Fonction carrée

Proposition 11
Soit X une variable aléatoire de densité f.
Alors, la variable aléatoire $Y = X^2$ est encore une variable aléatoire à densité. De plus, une densité de Y est

$$g : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Démonstration :

On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y. Essayons d'exprimer la fonction G en fonction de F.
Par définition, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant x)$$

- Si $x < 0$, alors $G(x) = 0$.
- Si $x > 0$, alors $G(x) = \mathbb{P}\left(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\right) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$.

Vérifions donc que G satisfait les hypothèses voulues pour être la fonction de répartition d'une variable à densité :
- G est continue sur $]-\infty, 0[$ et par opérations sur les fonctions continues, G est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = F(0) - F(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} G(x) = G(0)$, donc G est bien continue sur $\mathbb{R}$.
- Si on note $x_1, \ldots, x_n$ les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = x_i^2$, on voit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Ainsi, on sait que Y est bien une variable aléatoire à densité.
Déterminons une densité de la variable Y. Il nous faut donc calculer pour cela G'. En tout point x où G est dérivable, on a :

$$G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc en posant par exemple

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

on a obtenu une densité de la variable Y.

12.2.3 Fonction exponentielle

Proposition 12
Soit X une variable aléatoire de densité f.
Alors, la variable aléatoire $Y = e^X$ est encore une variable aléatoire à densité. De plus, une densité de Y est

$$g : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Démonstration :

On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y. Essayons d'exprimer la fonction G en fonction de F. Par définition, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(e^X \leqslant x)$$

- Si $x < 0$, alors $G(x) = 0$.
- Si $x > 0$, alors $G(x) = \mathbb{P}(X \leqslant \ln(x)) = F(\ln(x))$.

Vérifions donc que G satisfait les hypothèses voulues pour être la fonction de répartition d'une variable à densité :

- G est continue sur $]-\infty, 0[$ et par opérations sur les fonctions continues, G est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = 0 = G(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} G(x)$, donc G est bien continue sur $\mathbb{R}$.
- Si on note $x_1, \ldots, x_n$ les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = e^{x_i}$, on voit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, y_1, \ldots, y_n\}$.

Ainsi, on sait que Y est bien une variable aléatoire à densité.
Déterminons une densité de la variable Y. Il nous faut donc calculer pour cela G'. En tout point x où G est dérivable, on a :

$$G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc en posant par exemple

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

on a obtenu une densité de la variable Y.

12.3 Moments d'une variable aléatoire à densité

12.3.1 Espérance

Définition 13
Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.
Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente, alors on dit que X **admet une espérance** que l'on note $\mathbb{E}(X)$ et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

Remarque :

Si X est une variable aléatoire à densité à support borné, alors elle admet toujours une espérance.

Exemples :

E 1 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que f est une densité d'une variable aléatoire X.

- $\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) \geqslant 0$, donc f est positive.
- f est facilement continue sur $\mathbb{R}$ par opérations.
- La fonction f étant nulle en dehors du segment $[0,1]$ et la fonction f étant continue sur $[0,1]$,

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge bien et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (6t-6t^2)dt = \Big[3t^2-2t^3\Big]_0^1 = 1$$

Donc f est bien une densité de probabilité.

La variable X admet-elle une espérance ?
La densité f est à support borné qui est $[0,1]$, donc X admet bien une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^1 (6t^2-6t^3)dt = \Big[2t^3 - \frac{3}{2}t^4\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

E 2 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrons que f est une densité d'une variable aléatoire X.
- $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant 0$, donc f est positive.
- f est facilement continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par opérations.
- La fonction f étant nulle sur $]-\infty, 1[$ et continue sur $[1,+\infty[$, il s'agit de savoir si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge, ce qui est bien le cas puisque c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.
  Ainsi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge bien et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{\infty} f(t)dt = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dt}{t^2} = \lim_{A\to+\infty} \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \Big(1-\frac{1}{A}\Big) = 1$$

Donc f est bien une densité de probabilité.

La variable X admet-elle une espérance ?
On n'a pas une densité à support borné donc on doit tout vérifier.
La fonction $t \mapsto |tf(t)|$ est nulle sur $]-\infty, 1[$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^1 |tf(t)|dt$ converge bien.
Sur $[1,+\infty[$, on a $|tf(t)| = \frac{1}{t}$ et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} |tf(t)|dt$ diverge.
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ n'est pas absolument convergente et X n'admet pas d'espérance.

Définition 14
Si X est une VAR telle que $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une **variable centrée**.

Proposition 15
Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors, pour tous réels a et b, la variable $aX+b$ admet également une espérance et

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Théorème 16

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité admettant une espérance. Si $X+Y$ est une variable aléatoire à densité, alors elle admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Théorème 17 ***Théorème de Transfert***

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f.
Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ est absolument convergente, alors la variable $g(X)$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$$

12.3.2 Moment d'ordre r

Définition 18

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt$ est absolument convergente, alors on dit que X **admet un moment d'ordre** r, noté $m_r(X)$ et on a

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt$$

Remarques :

- **R 1** – L'espérance de X est simplement le moment d'ordre 1 de X
- **R 2** – Si X est une variable à densité à support borné, X admet des moments de tout ordre.

12.3.3 Variance et écart-type

Définition 19

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

Théorème 20 ***Formule de König-Huygens***

Soit X une VAR à densité. Alors

$$X \text{ admet une variance} \iff X \text{ admet un moment d'ordre } 2$$

et en cas d'existence, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Exemples :

E 1 – Reprenons l'exemple précédent :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a montré que f était la densité d'une varible X qui admettait une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{2}$.

X étant une variable à support borné, elle admet également un moment d'ordre 2 et donc une variance. De plus,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^1 (6t^3 - 6t^4)dt = \left[\frac{3}{2}t^4 - \frac{6}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

Donc

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

E 2 – Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

X possède-t-elle une espérance ? une variance ?

La fonction $t \mapsto |tf(t)|$ est nulle sur $]-\infty, 1]$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^1 |tf(t)|dt$ converge.

Sur $[1, +\infty[$, $|tf(t)| = \dfrac{2}{t^2}$ est donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge (Riemann avec $2 > 1$).

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente, donc X admet bien une espérance qui vaut

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}dt = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} = 2$$

La fonction $t \mapsto |t^2 f(t)|$ est nulle sur $]-\infty, 1]$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^1 |t^2 f(t)|dt$ converge.

Sur $[1, +\infty[$, $|t^2 f(t)| = \dfrac{2}{t}$ est donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} |t^2 f(t)|dt$ diverge (Riemann).

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ n'est pas absolument convergente, donc X n'admet pas de moment d'ordre 2, et donc pas de variance.

Proposition 21

Soit X une variable à densité admettant une variance. Alors, pour tous réels a et b, la variable $aX + b$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

Définition 22

Si X admet une variance, alors $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
On appelle alors **écart-type de X** le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Définition 23
Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que **X est une variable réduite**.

Définition 24
Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est appelée la **variable centrée réduite associée à X**.

12.4 Lois usuelles

12.4.1 Loi uniforme sur un intervalle

Remarque :

> C'est la loi la plus "usuelle". Elle correspond au fait de choisir "au hasard" un réel dans un segment $[a, b]$

.

Définition 25
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur $[a, b]$**, et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a, b])$, si elle admet pour densité la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 26
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$. Alors la fonction de répartition F de X vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \textit{si } a < x < b \\ 1 & \textit{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Démonstration :

Par définition de la densité, on sait que la fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- si $x \leqslant a$, alors $f \equiv 0$ sur $]-\infty, x]$, donc

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

- si $a < x < b$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

- si $x \geqslant b$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{x} 0dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b + 0 = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Théorème 27

Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[a,b]$.
Alors X admet une espérance et une variance égales à :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstration :

Comme X est à support borné, elle admet bien des moments d'ordre 1 et 2, donc une espérance et une variance. On calcule donc :

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b \frac{t^2}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

12.4.2 Loi exponentielle

Définition 28

Soit λ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ, et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Proposition 29

Soit X une variable suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors, sa fonction de répartition F vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \textit{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration :

On a pour tout réel x, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- Si $x < 0$, on a $f \equiv 0$ sur $]-\infty, x]$, donc

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

- Si $x \geqslant 0$, on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = \Big[-e^{-\lambda t}\Big]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Théorème 30

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors X admet une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Démonstration :

Sur $]-\infty, 0[$, la fonction $t \mapsto |tf(t)|$ est nulle donc $\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|dt$ est convergente et vaut 0.
Sur $[0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto |tf(t)|$ est continue donc il y a un problème uniquement en $+\infty$. Soit $A > 0$, alors en utilisant une intégration par parties,

$$\int_0^A |tf(t)|dt = \int_0^A \lambda t e^{-\lambda t}dt = \Big[-te^{-\lambda t}\Big]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda t}dt = -Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

Or, la limite lorsque $A \to +\infty$ de l'expression précédente est $\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente.
La variable X admet donc une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

On admet le calcul de la variance qui se fait de même (par intégration par parties)

12.4.3 Loi normale centrée réduite

Définition 31

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite**, et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Remarques :

R 1 – On admettra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$$

de manière à ce que la fonction f précédente est bien une densité de probabilité.

R 2 – On ne connaît pas de primitive de la fonction f, on ne connaît donc pas d'expression de la fonction de répartition d'une variable X suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On la notera Φ mais nous connaîtrons quelques unes de ses propriétés.

Proposition 32

Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Alors Φ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Démonstration :

La densité f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

est paire. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)dt \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-x} f(t)dt \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{-A}^{x} f(-u)(-du) \quad (\text{ch.var. } u=-t) \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{x}^{-A} f(u)du \\
&= \int_{x}^{+\infty} f(u)du \\
&= 1-\Phi(x)
\end{aligned}$$

Théorème 33

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Alors X admet une espérance et une variance qui valent :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = 1$$

12.4.4 Loi normale

Définition 34

Soit m un réel et soit σ un réel strictement positif. On dit que X suit la **loi normale de paramètres** (m,σ^2), et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Proposition 35

Soit X une variable aléatoire et soit $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ sa variable aléatoire centrée réduite associée. Alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2) \iff X^* \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque :

Toutes les lois normales sont donc liées à la loi normale centrée réduite. Cette propriété sera importante dans les prochains chapitres.

Démonstration :

On utilise le résultat de la proposition 10, qui nous dit que si X est une variable de densité f, alors $aX+b$ est une variable de densité $x \mapsto \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

$\Rightarrow$ Supposons que X suive une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors la densité de $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ est

$$g(x) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma(x-m/\sigma)-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

et donc Y suit bien une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$\Leftarrow$ Supposons que Y suive une loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $X = \sigma Y + m$ et on a donc une densité de X :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2/\sigma^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

et donc X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Théorème 36

Si X est une variable aléatoire à densité suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(X) = m, \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Démonstration :

On sait que $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc $X = \sigma Y + m$. Or puisque Y admet une espérance et une variance, X en admet également (fonction linéaire de Y) et

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sigma Y + m) = \sigma\mathbb{E}(Y) + m = 0 + m = m$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(\sigma Y + m) = \sigma^2\mathbb{V}(Y) = \sigma^2$$