CHAPITRE 8

Couples de VAR discrètes

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

8.1 Couples de VARD

8.1.1 Loi d'un couple

Définition 1

On appelle **couple de variables aléatoires réelles discrètes** et note (X, Y) toute application

$$(X,Y) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Autrement dit, à chaque issue de notre expérience, on associe un vecteur dont chaque composante est une variable aléatoire.

Définition 2

On appelle **loi du couple (X, Y)** ou encore la **loi conjointe des VAR X et Y** la donnée de :

- $(X,Y)(\Omega) = \{(x_i, y_i),\ x_i \in X(\Omega)\ /\ y_j \in Y(\Omega)\}$
- $\forall x_i \in X(\Omega),\ \forall y_j \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$

Remarque :

On représentera en général cette loi si cela est possible par un tableau à double entrée.

Exemples :

E 1 – Une urne contient deux boules blanches, trois boules rouges et quatre boules bleues.
On tire simultanément trois boules de l'urne.
On note X le nombre de boules blanches parmi ces 3 boules, et Y le nombre de boules rouges.

Déterminons la loi du couple (X, Y).

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$.

- Déjà si $i + j \geqslant 4$, l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ est impossible et donc

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$$

- Si $i + j \leqslant 3$, l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ signifie que l'on a tiré i boules blanches, j boules rouges et $3 - i - j$ boules bleues. Le nombre de façons d'obtenir une telle combinaison est donc $\dbinom{2}{i}\dbinom{3}{j}\dbinom{4}{3-i-j}$ parmi les $\binom{9}{3} = 84$ façons possibles de tirer trois boules de l'urne. On a donc

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\dbinom{2}{i}\dbinom{3}{j}\dbinom{4}{3-i-j}}{\dbinom{9}{3}}$$

On a donc après calculs :

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{84}$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	0
2	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	0	0

E 2 – On réalise une succession de lancers d'une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0, 1[$ et la probabilité d'obtenir Face est $q = 1 - p$.
On note X le rang d'apparition du premier Pile et Y le rang d'apparition du deuxième Pile.

Quelle est la du couple (X, Y) ?

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Calculons $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.

- Il est impossible que le deuxième Pile arrive avant le premier Pile.
  Si $i \geqslant j$, on a :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$$

- Si $i < j$, on a $[X = i] \cap [Y = j] = F_1 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j-1} \cap P_j$, donc on a :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = q^{i-1}pq^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2$$

Proposition 3

L'ensemble $([X=i]\cap[Y=j])_{i\in X(\Omega),j\in Y(\Omega)}$ *forme un système complet d'événements.*
En particulier, on a :

$$\sum_{\substack{i\in X(\Omega)\\ j\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right)=1$$

Remarque :

Dans le tableau à double entrée, on a donc toujours la somme de toutes les valeurs du tableau égale à 1.

8.1.2 Lois marginales

Définition 4

Soit (X,Y) un couple de VAR discrètes.
La loi de X et la loi de Y sont appelées les **lois marginales du couple** (X,Y).

Remarque :

Si on connaît la loi du couple (X,Y), on peut en déduire la loi de X et la loi de Y grâce à la Formule des Probabilités Totales, en utilisant le système complet d'événement $([Y=j])_{j\in Y(\Omega)}$ (resp. le système complet d'événements $([X=j])_{j\in X(\Omega)}$).

Proposition 5

Soit (X,Y) *un couple de VAR discrètes. Alors, on a :*

$$\forall k\in X(\Omega),\quad \mathbb{P}(X=k)=\sum_{j\in Y(\Omega)}\mathbb{P}([X=k]\cap[Y=j])$$

$$\forall k\in Y(\Omega),\quad \mathbb{P}(Y=k)=\sum_{j\in X(\Omega)}\mathbb{P}([X=j]\cap[Y=k])$$

Exemple :

Si on reprend l'exemple 1, il suffit donc de sommer les lignes et les colonnes du tableau pour obtenir les lois marginales de X et Y à partir de la loi du couple (X,Y).

$X \setminus Y$	0	1	2	3	Loi de X
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{12}$
Loi de Y	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$	1

Par exemple, déterminons la loi de Y.
On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. De plus, la famille $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$ forme un système complet d'événements.
La formule des probabilités totales donne alors que

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} = \boxed{\frac{5}{21}}$$

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{3}{14} + \frac{2}{7} + \frac{1}{28} = \boxed{\frac{15}{28}}$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2]) = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + 0 = \boxed{\frac{3}{14}}$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 3]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 3]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 3]) = \frac{1}{84} + 0 + 0 = \boxed{\frac{1}{84}}$$

8.1.3 Lois conditionnelles

Définition 6

Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes.
Soit $y \in Y(\Omega)$.
On appelle **loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$** la loi de la variable X sachant l'événement $[Y = y]$, autrement dit, la donnée de :

- $X(\Omega)$
- $\forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}_{[Y=y]}(X = k)$

On définit de même pour tout $x \in X(\Omega)$ la **loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$**.

Exemple :

On reprend le premier exemple (tirages des 3 boules dans l'urne).
Déterminons la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 2]$.

- On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
- $\mathbb{P}_{[Y=2]}(X = 2) = \dfrac{\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2])}{\mathbb{P}(Y = 2)} = 0$
- $\mathbb{P}_{[Y=2]}(X = 1) = \dfrac{\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2])}{\mathbb{P}(Y = 2)} = \dfrac{\frac{1}{14}}{\frac{14}{3}} = \dfrac{1}{3}$
- $\mathbb{P}_{[Y=2]}(X = 0) = \dfrac{\mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 2])}{\mathbb{P}(Y = 2)} = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{14}{3}} = \dfrac{2}{3}$

Remarque :

On peut jongler entre loi du couple, lois marginales, lois conditionnelles. Il s'agit simplement d'application la formule des probabilités composées, ou la formule des probabilités totales.
Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes. Alors :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}_{[X=x]}(Y = y)$$

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [X = y]) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}_{[Y=y]}(X = x)$$

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = \sum_{k \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}_{[Y=k]}(X = x)$$

$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = y)$$

8.2 Indépendance et corrélation de VARD

8.2.1 Variables aléatoires indépendantes

Définition 7 **Indépendance de 2 VARD**

Soient deux variables aléatoires discrètes X et Y.
On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Autrement dit, pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$ les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

Remarque :

Si on connaît la loi du couple (X, Y) dans un tableau à double entrée, si au moins un zéro apparaît, on est certain que les variables ne seront pas indépendantes.

Exemples :

E 1 – Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement deux boules avec remise. Soient X et Y les numéros respectivement obtenus. On a :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{n^2} = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$$

donc les variables X et Y sont indépendantes.

E 2 – Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement deux boules sans remise. Soient X et Y les numéros respectivement obtenus. On a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i]) = 0$$

mais a priori $\mathbb{P}(X = i)$ et $\mathbb{P}(Y = i)$ ne sont pas nulles, donc on a $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i]) \neq \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = i)$. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Remarque :

Si X et Y sont indépendantes, on a aussi

$$\mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y)$$

Proposition 8

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Si f et g sont deux fonctions numériques définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exemple :

Si X et Y sont indépendantes, les variables X^2 et $2Y - 1$ sont également indépendantes.

Définition 9 **Indépendance de n VARD**

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires discrètes.
On dit que les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

Remarque :

> Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n VARD discrètes indépendantes, alors si Y est une fonction des variables $X_1, \dots, X_p$ et Z est une fonction des variables $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$, alors Y et Z sont indépendantes.
> Par exemple, si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 VAR discrètes indépendantes, alors les variables $X_1 + 2X_4^2$ et $X_5 - \exp(X_3)$ sont indépendantes.

Définition 10 **Indépendance d'une infinité de VARD**

On dit que la suite de VAR discrètes $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une **suite de variables aléatoires indépendantes** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables $X_0, X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

8.3 Fonction de deux VARD

8.3.1 Loi de probabilité d'une fonction de deux VARD

Définition 11

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie au moins sur l'ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire telle que

$$Z(\Omega) = \{g(i, j), \quad i \in X(\Omega),\ j \in Y(\Omega)\} = \{z_k, k \in K\}$$

Proposition 12

Soit $Z = g(X, Y)$. Alors, on a

$$\forall z_k \in Z(\Omega), \quad \mathbb{P}(Z = z_k) = \sum_{\substack{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(i,j) = z_k}} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

Théorème 13

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Soit $Z = X + Y$, alors

$$\forall k \in Z(\Omega), \quad \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = k - i])$$

Exemples :

E 1 – On reprend l'exemple 1 dont la loi est donnée par :

$X \ \backslash \ Y$	0	1	2	3
0	1/21	3/14	1/7	1/84
1	1/7	2/7	1/14	0
2	1/21	1/28	0	0

.

Soit $S = X + Y$. Déterminons la loi de S.

- $S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
- $\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{21}$.
- $\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{3}{14} + \frac{1}{7} = \frac{5}{21}$.
- $\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{21} = \frac{10}{21}$.
- $\mathbb{P}(S = 3) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 3]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 3] \cap [Y = 1])$
$= \frac{1}{84} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{10}{84}$.

E 2 – Soit $Z = XY$. Déterminons la loi de Z.

- $Z(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
- $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$
- $\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{3}{28}$.
- $\mathbb{P}(Z = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z = 1) - \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{51}{84}$

Proposition 14 ***Stabilité de la loi binomiale***

Soient X et Y deux VAR telles que : $\begin{cases} X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p) \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m, p) \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{cases}$

Alors, la variable $Z = X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Plus généralement, si $X_1, \dots, X_k$ sont k variables indépendantes suivant respectivement des lois binomiales $\mathcal{B}(n_1, p), \mathcal{B}(n_2, p), \dots, \mathcal{B}(n_k, p)$, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p)$.

Démonstration :

Voir TD.

Proposition 15 ***Stabilité de la loi de Poisson***

Soient X et Y deux VAR telles que : $\begin{cases} X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda') \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{cases}$

Alors, la variable $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \lambda')$.

Plus généralement, si $X_1, \dots, X_k$ sont k variables indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1), \mathcal{P}(\lambda_2), \dots, \mathcal{P}(\lambda_k)$, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k, p)$.

Démonstration :

Voir TD.

8.3.2 Espérance

Théorème 16 ***Linéarité de l'espérance***

Soient X et Y deux VAR discrètes admettant une espérance, et soient a et b deux réels. Alors $aX+bY$ admet également une espérance et :

$$\boxed{\mathbb{E}[aX+bY]=a\mathbb{E}[X]+b\mathbb{E}[Y]}$$

Plus généralement, si $X_1,\dots,X_n$ sont n variables aléatoires discrètes admettant toutes une espérance, alors la variable $X_1+X_2+\cdots+X_n$ admet également une espérance et

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\mathbb{E}[X_1]+\mathbb{E}[X_2]+\cdots+\mathbb{E}[X_n]}$$

Théorème 17 ***Théorème de transfert***

Soient X et Y deux VAR discrètes et soit g une fonction définie sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, alors si $Z=g(X,Y)$ admet une espérance, elle vaut :

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right]=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)\mathbb{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right)$$

Théorème 18

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors si XY admet une espérance, on a :

$$\mathbb{E}[XY]=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right)$$

De plus, si X et Y sont indépendantes, $\boxed{\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$.

Démonstration :

Vérifions le deuxième point, si X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY]&=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right)\\&=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}\left(X=x\right)\mathbb{P}\left(Y=y\right)\quad\text{(par indépendance)}\\&=\sum_{x\in X(\Omega)}\left(\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}\left(Y=y\right)\right)x\mathbb{P}\left(X=x\right)\right)\\&=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{E}[Y]x\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X]\end{aligned}$$

Remarque :

Attention, la réciproque est fausse.

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Longrightarrow \mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \;\not\Longleftarrow\; \mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

8.3.3 Covariance de deux variables aléatoires

Définition 19

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance.
On appelle **covariance de X et de Y** le nombre réel défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\Big]$$

s'il existe.

Théorème 20

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la covariance de X et de Y existe et on a :

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$$

Remarques :

- **R 1** – On a $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
- **R 2** – On a $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}[X]$

Théorème 21

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Longrightarrow Cov(X,Y) = 0$$

Remarque :

La réciproque est fausse !
Il est possible qu'on ait $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et que les variables X et Y ne soient pas indépendantes.
Cependant, si $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, on est certain que X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 22

Si X et Y sont deux variables aléatoires telles que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

on dit que **les variables X et Y sont non corrélées**.

Exemple :

Reprenons notre exemple fil-rouge.
On a

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} + \frac{2}{12} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[Y] = \frac{15}{28} + \frac{6}{14} + \frac{3}{84} = 1$$

De plus, on a calculé la loi de $Z = XY$, donc

$$\mathbb{E}[XY] = 1 \times \frac{2}{7} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

Proposition 23

La covariance est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
Autrement dit, pour toutes variables X_1 et X_2, Y_1, Y_2 admettant des moments d'ordre 2 et pour tous réels a, b, on a :

$$Cov(aX_1 + bX_2, Y) = a\ Cov(X_1, Y) + b\ Cov(X_2, Y)$$

$$Cov(X, aY_1 + bY_2) = a\ Cov(X, Y_1) + b\ Cov(X, Y_2)$$

Définition 24

Soient X et Y deux VAR discrètes d'écart-type non nul.
On appelle **coefficient de corrélation linéaire de X et Y** le réel :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Remarque :

Le coefficient de corrélation linéaire est un réel compris entre -1 et 1.
Il compare les similarités entre les lois de X et Y.
Si $\rho = 1$, alors $Y = aX + b$ avec $a > 0$.
Si $\rho = -1$, alors $Y = aX + b$ avec $b < 0$.
Si $\rho \in]-1, 1[$ est proche de -1 et 1, la corrélation entre les variables est forte. On peut dire que les deux variables son alors **fortement corrélées**. Si $\rho = 0$, alors les variables sont **non corrélées**, donc sont linéairement indépendantes (mais pas forcément indépendantes dans le sens probabiliste).

8.3.4 Variance et somme

Théorème 25

Pour toutes variables X et Y admettant un moment d'ordre 2, alors $X + Y$ admet une variance et

$$\boxed{\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\ Cov(X, Y)}$$

De plus, si X et Y sont indépendantes,

$$\boxed{\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]}$$

Remarques :

R 1 – Plus généralement, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des VAR discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2, alors la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet également une variance et

$$\mathbb{V}[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i] + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

R 2 – De plus, si les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a

$$\mathbb{V}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \cdots + \mathbb{V}[X_n]$$