CHAPITRE 7

Variables aléatoires réelles discrètes

7.1 Généralités sur les VARD

7.1.1 Définition

Définition 1
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
On appelle **variable aléatoire réelle discrète (VARD)** définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que :
- $\mathrm{Im}(X) = X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ avec $I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$, ou une partie finie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$,
autrement dit, X ne peut prendre que des valeurs entières
- Pour tout $k \in X(\Omega)$, on a : $\{\omega \in \Omega \, / X(\omega) = k\} \in \mathcal{A}$,
autrement dit, chaque événement $(X = k)$ est bien un événement "mesurable" car dans la tribu $\mathcal{A}$.

Remarques :

R 1 – Les deux points de la définition d'une variable aléatoire signifient que :
- X ne peut prendre que des valeurs entières
- Pour tout $k \in X(\Omega)$, chaque événement $(X = k)$ est bien un événement "mesurable" car dans la tribu $\mathcal{A}$.

R 2 – L'ensemble $X(\Omega)$ est donc l'**ensemble des valeurs prises par la variable X**

R 3 – Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini et on dit que X est une VAR discrète finie.

R 4 – Si $X(\Omega)$ est un ensemble infini, on dit que X est une VAR discrète infinie.

Exemples :

E 1 – Un joueur lance sucessivement deux dés et note les deux numéros obtenus. L'univers de l'expérience est donc $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] = \{(x,y), x, y \in [\![1,6]\!]\}$.
On définit la VAR discrète X qui à chaque couple résultat associe la somme des deux nombres obtenus.
Ici, on a $X(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$. Donc X est une VAR discrète finie.

E 2 – On lance successivement un dé jusqu'à obtenir pour la première fois un 6. Soit X le nombre de lancers effectués.
On a, a priori, $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ car il est possible que l'on obtienne jamais le 6. Mais on peut démontrer que la probabilité de ne jamais obtenir 6 est égale à 0, c'est-à-dire que l'on obtiendra presque sûrement 6.
On peut donc choisir de considérer $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc X est une VAR discrète infinie.

Proposition 2

Soit X une VAR discrète, définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour tout intervalle J dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in J\}$ est un événement de $\mathcal{A}$ que l'on notera $[X \in J]$

Exemples :

E 1 – Lorsque $J = \{a\}$, on note $[X = a] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a\}$

E 2 – Lorsque $J =]-\infty, a]$, on note $[X \leqslant a]$.

E 3 – Lorsque $J = [a, b[$, on note $[a \leqslant X < b]$

E 4 – Reprenons l'exemple où un joueur lance deux fois de suite un dé et X désigne la somme des deux chiffres obtenus. On a :

$$[X = 2]\{(1,1)\}$$
$$[X = 4]\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$$
$$[X \leqslant 5]\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

7.1.2 Loi d'une VAR discrète

On considère à présent un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 3

On appelle **loi de probabilité** de la VAR discrète X l'ensemble des couples (x_i, p_i) où :
- $x_i \in X(\Omega)$
- $p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$

Remarques :

R 1 – Pour simplifier les notations, on notera simplement $\mathbb{P}([X = x_i]) = \mathbb{P}(X = x_i)$

R 2 – Quand on nous demande de déterminer la loi de X, on commence par donner $X(\Omega)$, puis pour chaque élément x_i de cet ensemble $X(\Omega)$, on donne $\mathbb{P}(X = x_i)$.

R 3 – Lorsque $X(\Omega)$ est fini et ne contient pas trop d'éléments, on peut présenter ses résultats sous forme de tableau avec dans la première ligne la valeur de x_i et dans la deuxième ligne $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Exemple :

On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Ω est l'ensemble des 32 cartes possibles. A chaque carte $\omega \in \Omega$, on associe le réel $X(\omega)$ défini par :

- $X(\omega) = 4$ si ω est un as
- $X(\omega) = 3$ si ω est un roi
- $X(\omega) = 2$ si ω est une dame
- $X(\omega) = 1$ si ω est un valet
- $X(\omega) = 0$ dans tous les autres cas

Déterminons la loi de X.

D'après l'énoncé, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

L'événement $[X = 0]$ est l'événement "obtenir une carte qui n'est pas un roi, une dame, un valet ou un as". Toutes les cartes ayant la même probabilité d'être choisies et comme il y a 16 cartes correspondant à notre événement, on a :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

L'événement $[X = 1]$ est l'événement "obtenir un valet", donc $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

De même, on a $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \dfrac{1}{8}$.

Donc, on peut donner la loi de X sous la forme d'un tableau :

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Théorème 4

Soit X une VAR discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors la famille d'événements $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements. En particulier, on a :

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$$

Remarque :

Comme $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements, on peut appliquer la Formule des Probabilités Totales :

Pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X = x_i] \cap A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}_{[X = x_i]}(A)$$

Théorème 5

Soit $\{(x_i, p_i),\ i \in I\}$ une partie de $\mathbb{R}^2$, où $I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$, ou une de leur partie finie.

Si :

- $\forall i \in I,\ p_i \geqslant 0$,
- $\sum_{i \in I} p_i = 1$,

Alors, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une VAR discrète X définie sur Ω tels que $\{(x_i, p_i), i \in I\}$ est la loi de X.

7.1.3 Fonction de répartition

Définition 6

On appelle **fonction de répartition de X** l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Proposition 7

La fonction de répartition d'une VAR discrète est une fonction en escalier.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent et notons F la fonction de répartition de X. On a :

- Soit $x \in]-\infty, 0[$. L'événement $[X \leqslant x]$ est impossible donc $F(x) = 0$.
- Soit $x \in [0, 1[$. La seule façon d'obtenir $X \leqslant x$ est d'avoir $X = 0$, donc $F(x) = \mathbb{P}(X = 0) = p_0 = \dfrac{1}{2}$
- Soit $x \in [1, 2[$. Alors $F(x) = p_0 + p_1 = \dfrac{5}{8}$
- Soit $x \in [2, 3[$. Alors $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = \dfrac{3}{4}$
- Soit $x \in [3, 4[$. Alors $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \dfrac{7}{8}$
- Soit $x \in [4, +\infty[$. Alors $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Proposition 8

Soit X une VAR discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit F sa fonction de répartition. Alors :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \in [0, 1]$,
2. *F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$,*
3. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
6. *F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*

Démonstration :

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \in [0,1]$ par définition d'une probabilité.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Alors $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$ et donc $\mathbb{P}(X \leqslant a) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant b)$, c'est-à-dire $F(x) \leqslant F(y)$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors $[a < X \leqslant b] = [X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]$, donc on a $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \leqslant a) = F(b) - F(a)$.

Théorème 9

Soit X une VAR discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit F sa fonction de répartition. On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. Si les x_i sont rangés dans l'ordre croissant, alors pour tout $i \in I$ tel que $1 - i \in I$ (on a alors $x_{i-1} < x_i$), on a :

$$\mathbb{P}(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Exemple :

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement deux boules avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la seconde boule, et Y le plus grand des deux numéros obtenus.
Déterminer la loi de Y.

La variable Y prend les valeurs $1, 2, 3, 4$, donc $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.
De plus, il est plus facile de calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$ que $\mathbb{P}(Y = k)$.
Par exemple :

$$[Y = 3] = ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 3]) \ \cup \ ([X_1 = 2] \cap [X_2 = 3]) \ \cup \ ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 3]) \ \cup \ ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 1]) \ \cup \ ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 2])$$

et

$$[Y \leqslant 3] = [X_1 \leqslant 3] \cap [X_2 \leqslant 3]$$

Notons F la fonction de répartition de la loi de Y. On va donc calculer $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$.

- $F(1) = \mathbb{P}(Y \leqslant 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.
- $F(2) = \mathbb{P}(Y \leqslant 2) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant 2] \cap [X_2 \leqslant 2]) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant 1)\mathbb{P}(X_2 \leqslant 1) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4}$.
- $F(3) = \mathbb{P}(Y \leqslant 3) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant 3] \cap [X_2 \leqslant 3]) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant 3)\mathbb{P}(X_2 \leqslant 3) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$.
- $F(4) = \mathbb{P}(Y \leqslant 4) = 1$.

On peut alors en déduire la loi de la variable Y :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = F(1) = \frac{1}{16}$$
$$\mathbb{P}(Y = 2) = F(2) - F(1) = \frac{3}{16}$$
$$\mathbb{P}(Y = 3) = F(3) - F(2) = \frac{5}{16}$$
$$\mathbb{P}(Y = 4) = F(4) - F(3) = \frac{7}{16}$$

7.1.4 Fonction d'une VARD

Définition 10

Soit X une VAR discrète définie sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note alors $g(X)$ l'application composée $g \circ X$, autrement dit l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \; g(X)(\omega) = g(X(\omega))$$

Proposition 11

*Soit X une VAR discrète définie sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors la variable $Y = g(X)$ est encore une VAR discrète définie sur Ω, vérifiant :*

$$Y(\Omega) = \{g(x_i), i \in I\}$$

et

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{i \in I \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemple :

Soit X une VAR dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- Quelle est la loi de $Y = 2X + 1$?
  La variable Y prend les valeurs -3, 3 et 5. Donc $Y(\Omega) = \{-3, 3, 5\}$. De plus,
  - $\mathbb{P}(Y = -3) = \mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{4}$
  - $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$
  - $\mathbb{P}(Y = 5) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$
- Quelle est la loi de $Z = X^2$?
  La variable Z prend les valeurs 1 et 4. Donc $Z(\Omega) = \{1, 4\}$. De plus,
  - $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$
  - $\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}([X = -2] \cup [X = 2]) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$

7.2 Moments d'une VARD

Dans toute cette partie, on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère X une VAR discrète définie sur cet espace.
On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ ($I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou une partie finie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$).
On note enfin, $\forall i \in I, p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

7.2.1 Espérance

Définition 12

On dit que la variable X **admet une espérance** (ou que **l'espérance de X existe** lorsque l'un de ces deux cas se présente :

- soit I est fini
- soit I est infini et la série $\sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente.

On appelle alors **Espérance mathématique de X** le réel $\mathbb{E}[X]$ défini par

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)}$$

Remarques :

R 1 – $\mathbb{E}[X]$ représente une moyenne des valeurs prises par X, les coefficients étant ici les probabilités respectives de ces valeurs.

R 2 – Lorsque X est une VARD finie, X admet forcément une espérance puisque la somme est finie (aucun problème pour la calculer).

R 3 – Si, pour tout $i \in I$, on a $a \leqslant x_i \leqslant b$, on aura nécessairement $a \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant b$.

R 4 – En particulier, si $\forall i \in I, x_i \geqslant 0$, on doit avoir $\mathbb{E}[X] \geqslant 0$.

Exemple :

On donne 1 pour lancer un dé équilibré. Si on fait 1, 2, on ne gagne rien. Si on fait 3 ou 4, on gagne 1e, si on fait 5, on gagne 2e mais si on fait 6, on gagne 4e.
Soit X la fortune algébrique qu'il nous reste après avoir lancé le dé.
X prend les valeurs -1 (si on fait "1" ou "2"), 0 (si on fait "3" ou "4"), 1 (si on fait "5"), 3 si on fait "6". On a donc $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

x_i	-1	0	1	3
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X est une VARD finie, donc X admet une espérance. De plus,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k) = -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

On remarque que l'on a bien $-1 \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant 3$ puisque X prenait ses valeurs dans $\{-1, 0, 1, 3\}$.

Théorème 13 ***Théorème de transfert***

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Si un de ces deux cas se présente :
- *soit I est fini*
- *soit I est infini et la série $\sum_{i\in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente,*

Alors la VAR $g(X)$ admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \sum_{i\in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemple :

On reprend notre jeu précédent, et on considère à présent la variable $Z = 2X^2 - 1$. Calculons $\mathbb{E}[Z]$. Comme X est une VARD finie, Z est également une VARD finie et donc Z admet bien une espérance. D'après le Théorème de Transfert, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[2X^2 - 1\right] \\ &= \sum_{k\in X(\Omega)} (2k^2 - 1)\mathbb{P}(X = k) \qquad = \left(2(-1)^2 - 1\right)\frac{1}{3} + (2(0)^2 - 1)\frac{1}{3} + \left(2(1)^2 - 1\right)\frac{1}{6} + \left(2(3)^2 - 1\right)\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{17}{6} \\ &= 3\end{aligned}$$

Corollaire 14

Si X admet une espérance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\mathbb{E}[X] + b$$

Définition 15

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance nulle, i.e.

$$\mathbb{E}[X] = 0$$

on dit que X est une **variable centrée**.

Proposition 16

Soit X une VAR discrète admettant une espérance $\mathbb{E}[X]$. Alors la variable aléatoire $X - \mathbb{E}[X]$ est une VAR discrète centrée, appelée la ***variable aléatoire centrée associée à la variable** X.*

Démonstration :

$\mathbb{E}[X]$ est un réel. Donc d'après la proposition précédente $X - \mathbb{E}[X]$ admet bien une espérance et

$$\mathbb{E}\left[X - \mathbb{E}[X]\right] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0$$

7.2.2 Moment d'ordre r

Définition 17

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si la variable aléatoire X^r admet une espérance, on dit alors que **la variable X admet un moment d'ordre r** qui est le réel

$$m_r(X) = \mathbb{E}\left[X^r\right]$$

Remarques :

R 1 – Le moment d'ordre 1 est donc l'espérance de X.

R 2 – Si X est une VAR discrète finie, elle admet un moment de tout ordre $r \geqslant 1$

R 3 – En cas de convergence, le théorème de transfert affirme que

$$\mathbb{E}\left[X^r\right] = \sum_{k \in X(\omega)} k^r \mathbb{P}(X = k)$$

Proposition 18

Soit $r \geqslant 1$. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet des moments d'ordre s pour n'importe quel $s \in [\![1, r]\!]$.

Démonstration :

Rappelons que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. Si I est fini, c'est évident.
Si I est infini ?
Soit $s \in [\![1, r]\!]$. Montrer que la série $\sum\limits_{i \in I} x_i^s \mathbb{P}(X = x_i)$ converge absolument.
Soit $i \in I$. Alors :

- si $|x_i| \geqslant 1$, $|x_i^s p_i| \leqslant |x_i^r p_i|$
- si $|x_i| \leqslant 1$, $|x_i^s p_i| \leqslant p_i$

Dans tous les cas, on a $|x_i^s p_i| \leqslant |x_i^r p_i| + p_i$.
Or, les séries $\sum\limits_{i \in I} |x_i^r p_i|$ et $\sum\limits_{i \in I} p_i$ convergent, donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{i \in I} |x_i^s p_i|$ converge. Ainsi, $\mathbb{E}[X^s]$ existe.

Corollaire 19

Si $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ existe, alors $\mathbb{E}\left[X\right]$ exste également.

Remarque :

La réciproque est fausse.

Exemple :

Soit X la VAR donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \lambda \frac{1}{n^3}$$

avec $\lambda = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}}$.
On a $n\mathbb{P}(X = n) = \lambda \frac{1}{n^2}$, donc $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge, et $\mathbb{E}[X]$ existe.
De plus, $n^2\mathbb{P}(X = n) = \lambda \frac{1}{n}$, donc $\sum n^2\mathbb{P}(X = n)$ diverge, et $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ n'existe pas.

7.2.3 Variance et écart-type

Définition 20

Soit X une VAR discrète admettant une espérance et telle que la variable $X - \mathbb{E}[X]$ admet un moment d'ordre 2.
On appelle alors **variance de la variable X** le réel :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

De plus, lorsque $\mathbb{V}(X)$ existe, on appelle **écart-type de X** le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Remarques :

- **R 1** – Si X est une VARD finie, alors X admet bien entendu une variance.
- **R 2** – Si X n'admet pas d'espérance, X ne peut pas admettre de variance.
- **R 3** – La variance mesure la dispersion de la variable X par rapport à sa moyenne $\mathbb{E}[X]$

Théorème 21 ***Formule de König-Huygens***

Soit X une VAR discrète. Alors

$$\mathbb{V}[X] \text{ existe} \iff \mathbb{E}[X^2] \text{ existe}$$

Et en cas d'existence, on a :

$$\boxed{\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2}$$

Démonstration :

On admet la première équivalence. Pour la formule, on applique le Théorème de Transfert.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 - 2\mathbb{E}[X]X + (\mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= \sum_{k \in X(\Omega)} (k^2 - 2\mathbb{E}[X]k + (\mathbb{E}[X])^2)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k \in X(\Omega)} k^2\mathbb{P}(X = k) - 2\mathbb{E}[X] \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k) + (\mathbb{E}[X])^2 \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2
\end{aligned}$$

Exemple :

Reprenons le cas du jeu de dés page 7.
On avait calculé $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}$. De plus,

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2\mathbb{P}(X = k) = (-1)^2\frac{1}{3} + 0^2\frac{1}{3} + 1^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} = 2$$

Ainsi
$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$$

Proposition 22

Soit X est une VAR discrète admettant une variance. Alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet également une variance et :
$$\mathbb{V}\left[aX + b\right] = a^2\mathbb{V}[X]$$

Démonstration :

Posons $Y = aX+b$. Comme X admet une espérance, on sait que Y admet une espérance et on a $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X]+b$. On a alors $(Y - \mathbb{E}[Y])^2 = (aX + b - a\mathbb{E}[X] - b)^2 = a^2\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2$. Comme $(X - \mathbb{E}[X])^2$ admet une espérance, alors la variable $(Y - \mathbb{E}[Y])^2$ admet une espérance également et donc Y admet bien une variance. De plus,
$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}[Y])^2 = a^2\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = a^2\mathbb{V}[X]$$

Définition 23

Soit X une VAR discrète admettant une variance (et donc une espérance).
Si $\mathbb{E}[X] = 0$ et si $\sigma(X) = 1$, on dit que **X est une variable centrée réduite**.

Proposition 24

Soit X une VAR discrète admettant une variance non nulle (et donc une espérance). Alors la variable aléatoire X^* définie par :
$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$$
*est une VAR discrète centrée réduite appelée la **variable aléatoire centrée réduite associée à X**.*

Démonstration :

En effet, $X^* = \frac{1}{\sigma(X)}X - \frac{\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$ du type $aX + b$. Donc puisque X admet une espérance et une variance, X^* admet bien une espérance et une variance. De plus,
$$\mathbb{E}[X^*] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sigma(X)}X - \frac{\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \frac{1}{\sigma(X)}\mathbb{E}[X] - \frac{\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)} = 0$$
et
$$\mathbb{V}[X^*] = \mathbb{V}\left[\frac{1}{\sigma(X)}X - \frac{\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \frac{1}{(\sigma(X))^2}\mathbb{V}[X] = 1$$
donc X^* est bien une variable aléatoire centrée réduite.

Remarque :

La notion de variable centrée et variable centrée réduite sera très importante dans un chapitre plus tard traitant de "convergences".

7.3 Lois discrètes usuelles

Dans toute cette partie, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

7.3.1 Loi uniforme

Modèle :

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On tire une boule dans l'urne et note X le numéro obtenu.
Les possibilités pour X sont donc $1, 2, 3, \dots, n$ et par équiprobabilité, chaque boule a une probabilité de $\dfrac{1}{n}$ d'être tirée.

Définition 25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$** si

$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![1, n]\!], \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}\left([\![1, n]\!]\right)$$

Remarque :

Plus généralement, on dit que X suit une **loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$** (les x_i deux à deux distincts) si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \end{cases}}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}\left(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}\right)$$

Proposition 26

Soit X une VAR qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = \frac{n^2-1}{12}}$$

Démonstration :

Puisque X est une variable finie (elle ne prend que n valeurs), X admet bien une espérance et une variance.

- $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n+1}{2}}$
- $\mathbb{E}[X^2] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \boxed{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}}$
- $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{n+1}{2}\left(\dfrac{2n+1}{3} - \dfrac{n+1}{2}\right) = \dfrac{n+1}{2}\dfrac{n-1}{6} = \dfrac{n^2-1}{12}$

7.3.2 Loi de Bernoulli

Modèle :

On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : un succès et un échec.
On suppose que le succès a une probabilité $p \in]0,1[$ de se réaliser (et l'échec a donc une probabilité $1-p$ de se réaliser).
On définit la variable X en posant $X = 1$ si on a le succès et $X = 0$ sinon. On a donc $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$.

Définition 27

Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\}, \\ \mathbb{P}(X=1) = p, \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p) \qquad \text{ou} \qquad X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$$

Proposition 28

Soit X une VAR qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = p}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = p(1-p)}$$

Démonstration :

Puisque X est une variable finie (elle prend exactement 2 valeurs), X admet bien une espérance et une variance.

- $\mathbb{E}[X] = 0\mathbb{P}(X=0) + 1\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1) = p$
- $\mathbb{E}[X^2] = 0^2\mathbb{P}(X=0) + 1^2\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1) = p$
- $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$

7.3.3 Loi binomiale

Modèle :

1. On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : un succès et un échec.
2. On suppose que le succès a une probabilité $p \in]0,1[$ de se réaliser (et l'échec a donc une probabilité $1-p$ de se réaliser).
3. On répète n fois cette expérience dans les mêmes conditions de manière indépendante.
4. On compte X le nombre de fois où on a obtenu un succès lors de ces n épreuves.

La variable X peut donc prendre toutes les valeurs de 0 à n.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Cherchons $\mathbb{P}(X=k)$, i.e. la probabilité qu'on ait eu exactement k succès sur l'expérience.

- Parmi les n épreuves, il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les numéros des k succès.
- Chacun de ces $\binom{n}{k}$ événements est réalisé avec une probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$.

On a donc $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Définition 29

Soit $p \in]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi Binomiale de paramètres n et p** si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = [\![0,n]\!], \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$$

Remarque :

La loi de Bernoulli est donc un cas particulier (lorsqu'on fait une unique expérience), et c'est pourquoi on peut écrire la notation $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$ pour une loi de Bernoulli de paramètre p.

Proposition 30

Soit X une VAR qui suit la loi Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = np}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = np(1-p)}$$

Démonstration :

Puisque X est une variable finie (elle prend exactement $n+1$ valeurs au maximum), X admet bien une espérance et une variance.

Supposons $n \geqslant 2$ (sinon on retrouve une variable de Bernoulli qu'on connaît déjà).

-
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell=k-1}}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1}(1-p)^{n-\ell-1}] = np\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{(n-1)-\ell} = np
\end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= np + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np + \sum_{k=2}^{n} n(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= np + \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} = np + n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}p^{\ell+2}(1-p)^{n-2-\ell} \\
&= np + n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

- $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np\left(1+(n-1)p - np\right) = np(1-p)$

7.3.4 Loi géométrique

Modèle :

1. On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : un succès et un échec.
2. On suppose que le succès a une probabilité $p \in]0,1[$ de se réaliser (et l'échec a donc une probabilité $1-p$ de se réaliser).
3. On répète cette expérience dans les mêmes conditions de manière indépendante (a priori une infinité de fois).
4. On compte X le numéro du lancer où apparaît pour la première fois le succès.

La variable X peut donc prendre toutes les valeurs de 1 jusqu'à l'infini. : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$

Notons A_i l'événement "le succès est réalisé à la i-ième expérience".
Notons B l'événement "le succès n'est jamais réalisé". On a $B = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = 0$$

On peut donc considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ seulement : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1}p$.

Définition 31
Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi Géométrique de paramètre p** si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p \end{cases}}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$$

Proposition 32
Soit X une VAR qui suit la loi Géométrique de paramètres $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}}$$

Démonstration :

$\sum\limits_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}p = p\sum\limits_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$.

On reconnaît une série dérivée géométrique de raison $1-p$ qui converge (car $p \in [0,1]$, donc $|1-p| < 1$). Ainsi, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(X=k)$ converge et X admet bien une espérance. De plus,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$$\sum_{k\geqslant 1} k^2\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\geqslant 1} k^2(1-p)^{k-1}p = p\left((1-p)\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \sum_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}\right).$$

On reconnaît deux séries dérivées géométriques (première et seconde) de raison $1-p$ qui convergent (car $p \in [0,1]$, donc $|1-p|<1$). Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 1} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge et X^2 admet bien une espérance. Ainsi, X admet bien également une variance.

$$\mathbb{E}[X^2] = p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1} +\infty k(1-p)^{k-1} = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$$

Donc

$$\mathbb{V}[X] = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p)+(p-1)}{p^2} = \frac{-(p-1)}{p^2}$$

7.3.5 Loi de Poisson

Définition 33

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre λ** si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}, \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \end{cases}}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

Remarque :

On ne dispose pas de situation concrète simple qui est modélisée la loi de Poisson.

Proposition 34

Soit X une VAR qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \lambda}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = \lambda}$$

Démonstration :

$\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\geqslant 0} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 1}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{\ell\geqslant 0}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}$

On reconnaît une série exponentielle de raison λ qui converge donc. Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(X=k)$ converge et X admet bien une espérance. De plus,

$$\mathbb{E}[X] = \lambda e^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

De même, on montrerait que la série $\sum_{k\geqslant 0} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge, donc X^2 admet une espérance, donc X admet bien une variance, et on aura $V[X] = \lambda$.