CHAPITRE 5

Révisions de dénombrement

5.1 Généralités sur les ensembles finis

Définition 1

Soit E un ensemble fini. On appelle **cardinal de** E le nombre d'éléments distincts que comporte l'ensemble E. On le note $Card(E)$.

Remarques :

- **R 1** – Deux ensembles finis E et F sont **de même cardinal** s'il existe une bijection de E à F.
- **R 2** – Un ensemble E de cardinal n est en bijection avec $[\![1, n]\!]$.
- **R 3** – Un ensemble E infini est dit **dénombrable** s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.
- **R 4** – L'ensemble vide est de cardinal 0.
- **R 5** – Si $A \subset B$, alors $Card(A) \leqslant Card(B)$.

Définition 2

Soit E un ensemble fini. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Proposition 3

Soient A, B, $A_1, \ldots, A_p$ des ensembles finis. Alors

1. *Si $A \cap B = \emptyset$ (A et B sont disjoints), alors*

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$$

Plus généralement, si $\forall i, j \in [\![1, p]\!], i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$, alors

$$Card\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p\right) = Card(A_1) + Card(A_2) + \cdots + Card(A_p)$$

2. ***Formule du crible de Poincaré :***

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

3.

$$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$$

Plus généralement,

$$Card(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} Card(A_i)$$

Théorème 4 ***Formule du crible, version générale***

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des ensembles finis, alors

$$Card(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} Card(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

5.2 Dénombrements classiques

5.2.1 p-listes quelconques

Définition 5

Une **p-liste** d'éléments d'un ensemble F est un élément de F^p, donc un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$, où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, x_i est un élément de F.

Remarques :

R 1 – Une p-liste peut être représentée par une application de $[\![1, p]\!]$ dans F. Ainsi, le nombre de p-listes d'éléments de F est $(Card(F))^p$.

Proposition 6

Pour tout ensemble E de cardinal n, on a $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Remarque :

Cela vient du fait que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ peut être mis en bijection avec l'ensemble des applications de E vers $\{0, 1\}$ par les fonctions caractéristiques.

Proposition 7 ***Lemme du berger***

Soit $f : E \to F$ une application surjective. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $Card(f^{-1}(\{y\})) = k$ (i.e. tous les éléments de F ont le même nombre k d'antécédents). Alors

$$Card(E) = kCard(F)$$

Exemple :

Le berger dort par terre dans la prairie à côté de ses moutons. Il se réveille et n'ouvre qu'un œil pour vérifier si son troupeau est bien là au complet. De sa position actuelle (allongé), il ne peut voir que les pattes des moutons. Or, il sait que chaque mouton a exactement 4 pattes (on suppose qu'il n'y a pas de mouton boiteux), donc s'il peut compter le nombre de pattes depuis sa position, il lui suffira de diviser le nombre par 4 pour obtenir le nombre de moutons.

5.2.2 p-listes sans répétition

Théorème 8

Soient A et B deux ensembles de cardinaux respectifs p et n. Alors le nombre d'injections de A et B est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

Exemple :

Les p-listes d'éléments distincts de F correspondent à des applications injectives de $[\![1,p]\!]$ dans F. Ainsi, si $Card(F) = n$, le nombre de p-listes d'éléments distincts de F est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

Les p-listes d'éléments distincts sont appelés des **p-arrangements**

Proposition 9

Soit E un ensemble fini, et soit $f : E \to E$ une application. Alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Remarque :

Le nombre de n-listes sans répétition d'un ensemble à n éléments est $n!$.
Les n-listes sans répétition d'un ensemble E de cardinal n sont appelées les **permutations de E**

5.2.3 Parties d'un ensemble

Définition 10

Le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ désigne le nombre de parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$.

Théorème 11

Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Pour les autres p, $\binom{n}{p} = 0$.

Remarques :

R 1 – Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$

R 2 – Si $n \geqslant p \geqslant 1$, on a $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$, autrement dit $\boxed{p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}}$.

R 3 – On a la **Formule de Pascal**

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

R 4 – Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a la **Formule du Binôme de Newton** : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$.

En particulier $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;

R 5 – Pour $a, b, p \in \mathbb{N}$, on a la **Formule de Vandermonde** : $\boxed{\binom{a+b}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}}$.

5.2.4 Différents "tirages" : se repérer

Les dénombrements apparaissent en général en probabilités dans des situations concrètes de "tirages" (par exemple des boules dans des urnes). Le problème est donc de dénombrer le nombre de façons de tirer p boules parmi n boules numérotées. Ce nombre dépend bien entendu du mode de tirage qu'on choisit.

Exemples :

E 1 – **Tirage successif avec remise**.
On a un ordre précis des boules (tirage successif), avec d'éventuelles répétitions (tirage avec remise). Un résultat correspond donc à une p-liste d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

Conclusion : Les tirages successifs avec remise de p boules parmi n, sont au nombre de n^p.

E 2 – **Tirage successif sans remise**.
On a toujours un ordre précis des boules (tirage successif), mais cette fois, les répétitions ne sont plus autorisées. Un résultat correspond donc à une p-liste d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.

Conclusion : Les tirages successifs sans remise de p boules parmi n, appelés les arrangements, sont au nombre de $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1)$.

E 3 – **Tirage simultané**.
On perd la notion d'ordre du tirage, puisqu'on tire toutes les boules simultanément, et il n'y a pas de répétition possible. Un résultat correspond donc à un sous-ensemble à p éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

Conclusion : Les tirages simultanés de p boules parmi n, appelés les combinaisons, sont au nombre de $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.