CHAPITRE 3

# Révisions sur les suites numériques

## 3.1 Révisions de vocabulaire

**Définition 1**

Une suite réelle $(u_n)$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$(u_n) : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

**Définition 2**

Une suite $(u_n)$ est dite :

- **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_n \leqslant M$,
- **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_n \geqslant m$,
- **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} \geqslant u_n$,
- **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} \leqslant u_n$,

**Remarques :**

**R 1** – Pour étudier le sens de variation d'une suite, on regarde donc le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

**R 2** – Dans le cas où $(u_n)$ est à termes strictement positifs, on peut étudier si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou inférieur à 1

**R 3** – Une suite croissante est minorée par son premier terme.

**R 4** – Une suite décroissante est majorée par son premier terme.

## 3.2 Suites classiques

### 3.2.1 Suites arithmétiques

**Définition 3**

Soit $(u_n)$ une suite de réels. On dit que $(u_n)$ est **arithmétique** si :

$$\exists r \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel $r$ est alors appelé la **raison** de la suite $(u_n)$.

**Proposition 4**

*Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$. Alors*

1. $\forall n \in \mathbb{N},\; u_n = u_0 + nr$ *(forme explicite)*
2. $\forall n \in \mathbb{N},\; u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_0+u_n}{2}(n+1)$.

**Remarque :**

Plus généralement, pour la somme de termes consécutifs :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{u_p + u_n}{2}(n-p+1)$$

### 3.2.2 Suites géométriques

**Définition 5**

Soit $(u_n)$ une suite de réels. On dit que $(u_n)$ est **géométrique** si :

$$\exists q \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = qu_n$$

Le réel $q$ est alors appelé la **raison** de la suite $(u_n)$.

**Proposition 6**

*Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$. Alors*

1. $\forall n \in \mathbb{N},\; u_n = u_0 q^n = u_1 q^{n-1}$ *(forme explicite)*
2. $\forall n \in \mathbb{N},\; u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \begin{cases} u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_0(n+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$.

**Remarque :**

Plus généralement, pour la somme de termes consécutifs :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \begin{cases} u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_p(n-p+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

### 3.2.3 Suites arithmético-géométriques

**Définition 7**

Soit $(u_n)$ une suite de réels. On dit que $(u_n)$ est **arithmético-géométrique** si :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

**Remarque :**

On a une méthode à appliquer lorsqu'on a une suite de ce type :
On commence par résoudre l'**équation caractéristique associée** :

$$\boxed{x = ax + b}$$

Si $a = 1$, on a une suite arithmétique : on sait déjà étudier $(u_n)$ ;
Si $a \neq 1$, l'équation caractéristique admet une unique solution qui est $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
On pose alors une suite auxiliaire $(v_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$$

La suite $(v_n)$ est alors géométrique de raison $a$ (à redémontrer). On en déduit une forme explicite de $v_n$ et ainsi une forme explicite de $u_n$ en fonction de $n$.

### 3.2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Définition 8**

Soit $(u_n)$ une suite de réels. On dit que $(u_n)$ est **récurrente linéaire double** si :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

**Remarque :**

On a une méthode à appliquer lorsqu'on a une suite de ce type :
On commence par résoudre l'**équation caractéristique associée** :

$$\boxed{x^2 = ax + b}$$

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes $\alpha$ et $\beta$, alors,

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(\alpha)^n + \mu(\beta)^n$$

  On trouve $\lambda$ et $\mu$ avec les conditions initiales (souvent les valeurs de $u_0$ et $u_1$).
- Si l'équation caractéristique admet une unique solution $\gamma$, alors,

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(\gamma)^n + \mu n(\gamma)^n$$

  On trouve $\lambda$ et $\mu$ avec les conditions initiales (souvent les valeurs de $u_0$ et $u_1$).

## 3.3 Suites convergentes

### 3.3.1 Définition

**Définition 9**

On dit qu'une suite $(u_n)$ **a pour limite** $\ell \in \mathbb{R}$ si $u_n$ est aussi proche que l'on veut de $\ell$ dès que $n$ est assez grand :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

On dit qu'une suite $(u_n)$ **tend vers** $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

**Définition 10**

On dit qu'une suite $(u_n)$ est **convergente** si elle admet une limite finie.
Une suite qui n'est pas convergente est dite **convergente**.

**Remarque :**

> Une suite divergente peut soit tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit ne pas avoir de limite, comme la suite $(u_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.

### 3.3.2 Propriétés

**Proposition 11**

1. *Si une suite est convergente, sa limite est unique.*
2. *Si une suite est convergente, alors elle est bornée.*
3. *Si $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent et si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*
4. *Si $(u_n)$ diverge vers $+\infty$ et si $(v_n)$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, alors $(v_n)$ diverge également vers $+\infty$.*
5. ***Théorème des gendarmes**.*
   *Si $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites vérifiant :$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et si on sait que $(u_n)$ et $(w_n)$ convergent vers une même limite $\ell$, alors la suite $(v_n)$ est également convergente, et converge vers $\ell$.*
6. *Si une suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$ et si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < \ell < b$, alors*

$$\exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant N,\ a < u_n < b$$

**Remarques :**

> **R 1** – Si $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$, alors :
> – Si $r > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
> – Si $r < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
> – Si $r = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$

**R 2** – Si $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q$, alors :
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$
- Si $q \leqslant -1$, $(u_n)$ n'admet pas de limite (sauf si $u_0 = 0$)

**Proposition 12** ***Théorème de la limite monotone***

- *Toute suite croissante majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante minorée est convergente.*
- *Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.*
- *Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*

**Définition 13**

Deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites **adjacentes** si
- une des deux est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

**Théorème 14**

*Deux suites adjacentes sont toujours convergentes, et convergent alors vers la même limite.*

### 3.3.3 Comparaison des suites

**Définition 15**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles.
- On dit que la suite $(u_n)$ **est négligeable par rapport à** $(v_n)$, et on note

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

  s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)$ définie à partir du rang $n_0$ telle que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = v_n\varepsilon \qquad \text{avec } \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- On dit que la suite $(u_n)$ **est équivalente à** $(v_n)$, et on note

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

  s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\alpha_n)$ définie à partir du rang $n_0$ telle que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = v_n\alpha_n \qquad \text{avec } \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

**Théorème 16**

*Si à partir d'un certain rang la suite $(v_n)$ ne s'annule pas, alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

**Proposition 17** ***Equivalents usuels***

*Si $(u_n)$ est une suite qui converge vers 0, alors on sait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\boxed{\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n} \quad \boxed{e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n} \quad \boxed{(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n}$$

$$\boxed{\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n} \quad \boxed{\cos(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n^2}{2}} \quad \boxed{\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

## 3.4 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

### 3.4.1 Définition d'une telle suite

**Définition 18**

On appelle suite récurrente d'ordre 1, toute suite définie par son premier terme $u_0$ et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

pour $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

**Remarques :**

- **R 1** – Il faut tout d'abord vérifier que la suite est **bien définie**, autrement dit si on peut calculer tous les $u_n$.
- **R 2** – On cherche pour cela les **intervalles stables par $f$**, autrement dit les intervalles $J$ tels que $f(J) \subset J$. En effet, si $u_0$ est dans un intervalle stable, alors la suite sera bien définie.

### 3.4.2 Limites éventuelles

**Définition 19**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
On dit qu'un élément $x \in I$ est un **point fixe** de $f$ s'il vérifie

$$f(x) = x$$

**Proposition 20**

*Soit $f$ une fonction continue sur $I$ et soit $(u_n)$ une suité dont tous les termes sont dans $I$.*
*Si la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell \in I$, alors on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.*

**Théorème 21**

*Soit $f : I \to I$ une fonction continue sur $I$, et soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.*
*Si la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$, alors $\ell$ est nécessairement un point fixe de $f$.*

### 3.4.3 Cas où $f$ est croissante

Lorsque $f$ est croissante, la suite sera toujours monotone. Il suffira donc de regarder si elle est majorée ou minorée.

**Exemple :**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

- Montrons que la suite est bien définie.
  Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ : "$u_n$ existe et $u_n \geqslant 0$" est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
  - Pour $n = 0$, on sait que $u_0$ existe et $u_0 = 0 \geqslant 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
    Comme $u_n \geqslant 0$, on peut calculer $\sqrt{u_n + 2}$, donc $u_{n+1}$ existe bien. De plus, $\sqrt{u_n + 2} \geqslant 0$, donc on a $u_{n+1} \geqslant 0$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - Par récurrence, la suite $(u_n)$ est donc bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
- Limites éventuelles
  On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

  $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \sqrt{x + 2}$$

  Comme $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, si la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$, alors nécessairement $\ell$ sera un point fixe de $f$ et on devra avoir $\ell \geqslant 0$.
  Cherchons donc les points fixes de $f$ :

  $$f(x) = x \iff \sqrt{x + 2} = x \iff x + 2 = x^2 \iff x \in \{-1, 2\}$$

  Le seul point fixe de $f$ est donc $x = 2$, donc la seule limite possible pour $(u_n)$ est $\ell = 2$.
- Sens de variation.
  La fonction $x \mapsto x + 2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est croissante également sur $\mathbb{R}^+$, donc par composition $f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
  On a $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2}$, donc la suite $(u_n)$ a l'air d'être croissante.
  Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ : $u_n \leqslant u_{n+1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - $n = 0$, on a bien $u_0 \leqslant u_1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Puisque $f$ est croissante, on a alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
  - Par récurrence, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire la suite $(u_n)$ est croissante.
- Convergence.
  On sait que $(u_n)$ est croissante, il suffit de regarder si la suite est majorée ou non pour savoir si elle converge vers 2 ou diverge vers $+\infty$.
  Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ : "$u_n \leqslant 2$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - $n = 0$. Comme $u_0 = 0$, on a bien $u_0 \leqslant 2$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que $u_n \leqslant 2$, puisque $f$ est croissante, on a donc $f(u_n) \leqslant f(2)$, ce qui signifie que $u_{n+1} \leqslant 2$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - Par récurrence, on a donc montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2$, donc la suite $(u_n)$ est majorée.

  La suite $(u_n)$ est donc croissante et majorée, donc convergente.
  De plus, sa seule limite possible est 2, donc la suite $(u_n)$ converge vers 2.

### 3.4.4 Cas où $f$ est décroissante

Lorsque $f$ est décroissante, la suite ne sera pas monotone. On regardera alors les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ pour montrer qu'elles convergent vers la même limite.

**Exemple :**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$$

- Montrons que la suite est bien définie.
  Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ : "$u_n$ existe et $u_n > 0$" est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
  - Pour $n = 0$, on sait que $u_0$ existe et $u_0 = 1 > 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
    Comme $u_n > 0$, on peut calculer $1+\dfrac{2}{u_n}$, donc $u_{n+1}$ existe bien. De plus, $1+\frac{2}{u_n} > 0$, donc on a $u_{n+1} > 0$.
    La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - Par récurrence, la suite $(u_n)$ est donc bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
- Limites éventuelles
  On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

  Comme $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, si la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$, alors nécessairement $\ell$ sera un point fixe de $f$ et on devra avoir $\ell \geqslant 0$.
  Cherchons donc les points fixes de $f$ :

$$f(x) = x \Longleftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = x \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-1, 2\}$$

  Le seul point fixe de $f$ est donc $x = 2$, donc la seule limite possible pour $(u_n)$ est $\ell = 2$.
- Sens de variation.
  La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la fonction $u \mapsto 1 + 2u$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc par composition $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- La suite $(u_{2n})$
  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$. La suite $(v_n)$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f)(v_n)$$

  La fonction $f$ est décroissante, donc la fonction $f \circ f$ est croissante. Puisque $v_0 = 1$, et $v_1 = u_2 = \frac{5}{3}$, on peut montrer par récurrence que $(v_n)$ est croissante.
  Si la suite $(v_n)$ converge vers $\ell$, $\ell$ doit être un point fixe de $f \circ f$ et $\ell \geqslant 0$.

$$f \circ f(x) = x \Longleftrightarrow 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = x \Longleftrightarrow 1 + \frac{2}{x} + 2 = x\left(1 + \frac{2}{x}\right) \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-1, 2\}$$

  La seule limite possible est donc 2.
  Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ : "$v_n \leqslant 2$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  - $n = 0$, on a bien $v_0 = 1 \leqslant 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que $v_n \leqslant 2$. Puisque $f \circ f$ est croissante, on a alors $f \circ f(v_n) \leqslant f \circ f(2)$, soit $v_{n+1} \leqslant 2$.
  - Par récurrence, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant 2$, c'est-à-dire la suite $(v_n)$ est majorée.

  La suite $(v_n)$ est donc croissante et majorée, donc convergente. De plus, sa seule limite possible est 2, donc $(v_n)$ converge vers 2.

- La suite $(u_{2n+1})$.
  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1}$. La suite $(w_n)$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1}) = f \circ f)(w_n)$$

  La fonction $f$ est décroissante, donc la fonction $f \circ f$ est croissante. Puisque $w_0 = u_1 = 3$, et $w_1 = u_3 = \frac{11}{5}$, on peut montrer par récurrence que $(w_n)$ est décroissante.
  Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on sait que la suite $(w_n)$ est bien minorée.
  La suite $(w_n)$ est décroissante et minorée, donc convergente vers un réel $\ell$ qui doit nécessairement vérifier $\ell = f \circ f(\ell)$ et $\ell \geqslant 0$, donc $(w_n)$ converge vers 2.
- Convergence de $(u_n)$
  Comme les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers une même limite 2, on peut conclure que la suite $(u_n)$ converge vers 2.

### 3.4.5 Utilisation de l'Inégalité des Accroissements Finis

**Théorème 22** ***Inégalité des Accroissements Finis***

*Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ telle qu'il existe un réel $M$ vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant M$$

*Alors, pour tous $x, y \in [a, b]$, on a*

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|}$$

**Exemple :**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$$

- Encadrement de $(u_n)$.
  Montrons par récurrence que pour tout entier $n$, $\mathcal{P}(n)$ : "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$" est vraie
  - $u_0 = 1$, donc la propriété est bien vraie au rang 0.
  - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{3}{4} \leqslant 1 - \frac{u_n^2}{4} \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

    donc $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.
  - Par récurrence, on a donc montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
- Encadrement de $f'(x)$
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -\dfrac{x}{2}$. Donc,

$$\forall x \in [0, 1],\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$$

  et donc

$$\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

- Point fixe de $f$

$$f(x) = x \Longleftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-2 - \sqrt{8}, -2 + \sqrt{8}\}$$

  Seul $\alpha = -2 + \sqrt{8} \in [0, 1]$, donc c'est la seule limite possible pour la suite $(u_n)$.

- Utilisation de l'IAF.

  Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ : "$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  – $n = 0$, on a $|u_n - \alpha| = |u_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

  – Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

    $f$ est dérivable sur $[0, 1]$ et on a montré que $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. On peut donc appliuqer l'inégalité des accroissements finis. Puisque $u_n \in [0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$, on a donc

    $$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

    Autrement dit

    $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \overset{HR}{\leqslant} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

    Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

  – Par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

- Conclusion.

  Puisque $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$.

  Donc par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, et donc la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.