CHAPITRE 2

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

2.1 Matrices d'une application linéaire

2.1.1 Matrice colonne associée à un vecteur

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
Pour tout $u \in E$, on sait qu'il existe des scalaires uniques $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$.
Ce sont les **coordonnées** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

On note alors $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, et cette matrice colonne X est appelé le **vecteur colonne associé au vecteur u dans la base $\mathcal{B}$**.

Exemples :

E 1 – Soit $u = (2, 4, -7, 3) \in \mathbb{R}^4$. Quel est le vecteur colonne associé à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est composée des quatre vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0), \quad e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

On a donc $u = (2, 4, -7, 3) = 2(1, 0, 0, 0) + 4(0, 1, 0, 0) - 7(0, 0, 1, 0) + 3(0, 0, 0, 1) = 2e_1 + 4e_2 - 7e_3 + 3e_4$.

Donc le vecteur colonne associé à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

E 2 – Soit $P(X) = (X+1)(X^2-3X+4)+(X+2)^2$. Quel est le vecteur colonne associé à P dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$?

On cherche les coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

$P(X) = (X+1)(X^2-3X+4)+(X+2)^2 = X^3-2X^2+X+4+X^2+4X+4 = X^3-X^2+5X+8$

Donc $P(X) = 8\times 1 + 5\times X - 1\times X^2 + 1\times X^3$. Le vecteur colonne associé à P dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est donc

$$X = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarques :

R 1 – Plus généralement, si $u = (x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^n$, alors son vecteur colonne dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

R 2 – Plus généralement, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, alors son vecteur colonne dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

2.1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie p, et $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, et $\mathcal{B}_F = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.
On peut donc calculer $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)$, qui sont des vecteurs de F.
On appelle **matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont successivement les vecteurs colonnes associés aux vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

$$A = mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f(x,y,z) = (x-y+4z, 2x-y, x+3z, y-z)$.
Déterminons la matrice A de l'application f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
On a la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

- $f(1,0,0) = (1,2,1,0)$, donc $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$.
- $f(0,1,0) = (-1,-1,0,1)$, donc on complète : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot \\ 2 & -1 & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \end{pmatrix}$
- $f(0,0,1) = (4,0,3,-1)$, donc on complète : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice A de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Soit $x \in E$ et soit X le vecteur colonne associé à x dans la base $\mathcal{B}_E$.
Soit $y \in F$ et soit Y le vecteur colonne associé à y dans la base $\mathcal{B}_F$.
Alors, si A désigne la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, on a

$$\boxed{y = f(x) \Longleftrightarrow Y = AX}$$

C'est une formule très pratique pour calculer des images par f, lorsqu'on connaît sa matrice.

Exemple :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère le polynôme $P = 3X^2 - 2X + 1$. Comment calculer $f(P)$?

Le vecteur colonne associé à P dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ représente donc le vecteur $f(P)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a donc $f(P) = 1 + X^2$.

Proposition 3

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev.

1. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,F)$, alors*
$$mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f+g) = mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) + mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(g)$$
2. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors*
$$mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda f) = \lambda \times mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$$
3. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors*
$$mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$$

Remarques :

R 1 – Attention à ne pas échanger l'ordre des matrices dans la dernière formule, les matrices ne commutent pas toujours.

R 2 – On peut généraliser le dernier résultat :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f^k) = \left[mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\right]^k$$

Proposition 4

Soit f un endomorphisme de E et soit M sa matrice relative à une base $\mathcal{B}_E$ de E. Alors
$$f \text{ est bijectif} \iff A \text{ est inversible}$$
et dans ce cas, A^{-1} est exactement la matrice de f^{-1} relativement à la base $\mathcal{B}_E$.

Remarque :

Pour vérifier si un endomorphisme est bijectif, il suffit donc de voir si la matrice qui le représente est inversible. Le plus simple est de faire des opérations élémentaires pour transformer la matrice en une matrice triangulaire. Si la diagonale de cette nouvelle matrice ne contient aucun zéro, alors la matrice est bien inversible.

2.2 Changements de bases

2.2.1 Matrice de passage entre deux bases

On considère ici un espace vectoriel E de dimension n.

Définition 5

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$**, que l'on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice qui exprime en colonnes les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Exemples :

E 1 – Soit $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $\mathcal{B}_2 = (1, X-1, (X-1)^2)$ une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Quelle est la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$?
Quelle est la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$?

Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ signifie qu'il nous faut exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

- On a $1 = 1 + 0.X + 0.X^2$, donc $P = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
- On a $X - 1 = -1 + 1.X + 0.X^2$, donc on complète : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$
- On a $(X-1)^2 = 1 - 2X + X^2$, donc on complète : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$ signifie qu'il nous faut exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

- On a $1 = 1 + 0.(X-1) + 0.(X-1)^2$, donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
- On cherche a, b, c tels que $X = a + b(X-1) + c(X-1)^2$, donc on veut

$$X = (a - b + c) + (b - 2c)X + cX^2 \iff \begin{cases} c = 0 \\ b - 2c = 1 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc $X = 1 + (X-1) + 0.(X-1)^2$. Ainsi, on complète : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$

- On cherche a, b, c tels que $X^2 = a + b(X-1) + c(X-1)^2$, donc on veut

$$X^2 = (a-b+c) + (b-2c)X + cX^2 \iff \begin{cases} c = 1 \\ b - 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc $X^2 = 1 + 2(X-1) + 1.(X-1)^2$. Ainsi, on complète : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 6

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors :
(i) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est toujours une matrice inversible
(ii) $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

Remarques :

R 1 – En effet, on peut remarquer dans l'exemple précédent qu'on a bien $PQ = QP = I_3$.

R 2 – La plupart du temps, pour déterminer $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$, on utilisera plutôt la méthode du pivot de Gauss sur la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ plutôt que de déterminer la matrice $\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ en revenant à la définition.

2.2.2 Changement de coordonnées pour un vecteur

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Soit $u \in E$.
On note X le vecteur colonne associé à u dans la base $\mathcal{B}$.
On note X' le vecteur colonne associé à u dans la base $\mathcal{B}'$.
On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors,

$$\boxed{X = PX'}$$

Remarque :

Pour retenir de la formule, il faut se rappeler qu'on "colle" toujours les bases ensemble :

$$\begin{array}{cccc} X & = & P & X' \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{B}' \end{array}$$

Exemple :

Considérons la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[X]$: $(1, X-1, (X-1)^2)$.
Calculer les coordonnées du polynôme $R(X) = 4X^2 - 3X + 7$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

Dans la base canonique $\mathcal{B}_1$, on a facilement les coordonnées de $R(X)$: $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
On sait donc d'après la proposition précédente que les coordonnées de $R(X)$ dans la base $\mathcal{B}_2$ sont données par

$$P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Changement de bases pour une application linéaire

Proposition 8
*Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.
Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Notons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.
On note A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
On note A' la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.
Alors,*

$$A' = P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} A P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Remarque :

Pour retenir la formule, il faut se rappeler qu'on "colle" toujours les bases ensemble :

$$\underset{\mathcal{C}'\mathcal{B}'}{A'} = \underset{\mathcal{C}'\mathcal{C}}{P} \quad \underset{\mathcal{C}\mathcal{B}}{A} \quad \underset{\mathcal{B}\mathcal{B}'}{P}$$

Il faut toujours lire de la droite vers la gauche, comme pour une application

2.2.4 Changement de base pour un endomorphisme

Proposition 9
*On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E et soit f un endomorphisme de E.
On note M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et M' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Alors,*

$$M = PM'P^{-1}$$

Remarque :

C'est simplement un cas particulier de la formule générale précédente, appliquée à un endomorphisme : la formule est un peu plus simple.

Exemple :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f(aX^2+bX+c) = aX^2-(b+4a)X+(6a+4b+3c)$$

On garde encore les notations précédentes :
- $\mathcal{B}_1$ désigne la base canonique $(1, X, X^2)$
- $\mathcal{B}_2$ désigne la base $(1, X-1, (X-1)^2)$

Déterminons la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}_1$, puis la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}_2$.

Pour déterminer la matrice M, il nous calculer les coordonnées de $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ dans la base canonique.

$$f(1) = 3, \qquad f(X) = -X+4, \qquad f(X^2) = X^2-4X+6$$

Ainsi, la matrice M de f dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a calculé P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc d'après la formule de changement de base, la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}_2$ est :

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.5 Matrices semblables et équivalentes

Définition 10

Soient A et B deux matrices de même taille : n lignes et p colonnes.
On dit que **A et B sont équivalentes** si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in GL_p(\mathbb{K}),\ /\ A = PBQ$$

Proposition 11

Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles sont la matrice d'une même application linéaire f, dans des bases différentes.

Définition 12

Soient A et B deux matrices carrées de taille n.
On dit que **A et B sont semblables** si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})\ /\ A = PBP^{-1}$$

Proposition 13

Deux matrices sont semblables si elles sont la matrice d'un même endomorphisme relatives à deux bases différentes.

Proposition 14

Soient M et M' deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit P une matrice inversible telle que $M = PM'P^{-1}$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M^k = P\left(M'\right)^k P^{-1}$$

Démonstration :

Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(k)$: "$M^k = P(M')^k P^{-1}$" est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
$k = 0$. On a $M^0 = I$ et $P(M')^0 P^{-1} = PP^{-1} = I$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.
Soit $k \geqslant 0$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Alors

$$M^{k+1} = M^k M = P(M')^k P^{-1} \times PM'P^{-1} = P(M')^{k+1}P^{-1}$$

Ainsi, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie également.
Ainsi, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}, M^k = P(M')^k P^{-1}$.

Remarque :

Ainsi, si on sait bien calculer $(M')^k$, on peut en déduire la valeur de M^k. Ce sera donc un avantage considérable si on arrive à montrer que M est semblable à une matrice dont on sait facilement calculer les puissances, par exemple les matrices diagonales.

Proposition 15

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & (0) \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & d_n \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & & (0) \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & d_n^k \end{pmatrix}$.

Exemple :

Reprenons toujours notre exemple fil rouge. Nous avons montré que $M = P^{-1}M'P$ avec $M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Puisque M' est diagonale, on a donc que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (M')^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = P^{-1}(M')^k P$, après calculs on trouve l'expression de M^k :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k + (-1)^{k+1} & 3^k + 2(-1)^{k+1} + 1 \\ 0 & (-1)^k & 2(-1)^k - 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Valeurs propres et vecteurs propres

On désignera à présent par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Le but à présent est, si on se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ de trouver une "bonne base" $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, dans laquelle la matrice de f soit la plus simple possible, c'est-à-dire diagonale. Autrement dit, on aimerait avoir une base $(e_1, \dots, e_n)$ et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$$mat_{(e_1,e_2,\dots,e_n)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, il faudrait que ces vecteurs et ces scalaires vérifient

$$f(e_1) = \lambda_1 e_1, \qquad f(e_2) = \lambda_2 e_2, \qquad \cdots, \qquad f(e_n) = \lambda_n e_n$$

2.3.1 Définitions

Définition 16

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
  On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $u \in E$ non nul tel que
  $$f(u) = \lambda u$$
  Un vecteur u non nul vérifiant l'égalité précédente est alors appelé un **vecteur propre de f associé à la valeur propre λ**.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
  On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de la matrice A s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que
  $$AX = \lambda X$$
  Un vecteur colonne X non nul vérifiant l'égalité précédente est alors appelé un **vecteur propre de A associé à la valeur propre λ**.

Remarque :

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé **spectre de f** et est noté $Sp(f)$.
De même, l'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé **spectre de A** et est noté $Sp(A)$.

Exemples :

E 1 – Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X-1)P' + P$$

Calculons $f((X-1)^2)$ et déduisons-en une valeur propre de f.

$$f((X-1)^2) = 2(X-1)^2 + (X-1)^2 = 3(X-1)^2$$

Ainsi, 3 est une valeur propre de f et le polynôme $(X-1)^2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

E 2 – Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculons AX et déduisons-en une valeur propre de A.

$$AX = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3X$$

Ainsi, 3 est une valeur propre de la matrice A et X est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

Proposition 17

- *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit λ une valeur propre de f. On pose*

$$E_\lambda(f) = \{u \in E \;/\; f(u) = \lambda u\}$$

*Alors $E_\lambda(f)$ est un sev de E que l'on appelle **sous-espace propre de f associé à λ**.*

- *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de A. On pose*

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \;/\; AX = \lambda X\}$$

*Alors $E_\lambda(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ que l'on appelle **sous-espace propre de A associé à λ**.*

Démonstration :

Prouvons-le pour $E_\lambda(f)$. Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de E.

- $E_\lambda(f) \subset E$ par définition.
- $0 \in E_\lambda(f)$ puisque $f(0) = \lambda.0 = 0$, donc $E_\lambda(f) \neq \emptyset$.
- Soient $u, v \in E_\lambda(f)$: on a $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = \lambda v$.
  Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrons que $\alpha u + v \in E_\lambda(f)$.

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v) = \alpha(\lambda u) + (\lambda v) = \lambda(\alpha u + v)$$

  donc $\alpha u + v \in E_\lambda(f)$. Ainsi, $E_\lambda(f)$ est bien stable par combinaison linéaire.

Ainsi, on a montré que $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque :

On a

$$E_\lambda(f) = \{u \in E \;/\; f(u) = \lambda u\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)$$

De même,

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \;/\; AX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$$

2.3.2 Propriétés

Proposition 18

Soit f un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

1. $$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \lambda \text{ est une valeur propre de } A$$
2. *Un vecteur $u \in E$ est un vecteur propre de f associé à λ si et seulement si le vecteur colonne X associé à u dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Remarque :

On voit donc que chercher les valeurs propres d'un endomorphisme ou de sa matrice associée dans une base fixée revient au même

Proposition 19

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors*
$$\lambda \in \mathbb{K} \text{ est une valeur propre de } f \iff f - \lambda Id_E \text{ non bijective}$$
En particulier, 0 est une valeur propre de f si et seulement si f n'est pas bijective.
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors*
$$\lambda \in \mathbb{K} \text{ est une valeur propre de } A \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible}$$
En particulier, 0 est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

Remarques :

R 1 – Pour chercher les valeurs propres d'une matrice A, on regarde donc la matrice
$$A - \lambda I_n$$
et on la triangularise pour regarder son rang.
Toutes les valeurs de λ pour lesquelles la matrice n'est pas inversible (i.e. le rang est différent de n) fournissent les valeurs propres de la matrice A.

R 2 – En particulier, si une matrice est triangulaire, les valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

2.3.3 Bases de vecteurs propres

Théorème 20

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f.
Soient $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
Alors, la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre de E.

Démonstration :

Raisonnons par récurrence sur le nombre p de valeurs propres.

$p = 1$. Supposons qu'on ait un seul vecteur propre u_1, alors la famille (u_1) est bien une famille libre puisque u_1 est non nul.
Soit $p \geqslant 1$. Supposons que la propriété soit vraie au rang p, i.e. si on a p vecteurs propres pour p valeurs propres différentes, alors ils forment une famille libre de E.
Considérons une famille de vecteurs propres $(u_1, \dots, u_{p+1})$.
Soient $a_1, \dots, a_{p+1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_{p+1} u_{p+1} = 0 \qquad (1)$$

On applique f à cette égalité, on obtient :

$$a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + \cdots + a_{p+1} f(u_{p+1}) = 0$$

soit

$$a_1 \lambda_1 u_1 + a_2 \lambda_2 u_2 + \cdots + a_{p+1} \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0 \qquad (2)$$

Alors, $\lambda_{p+1}(1) - (2)$ donne :

$$\sum_{k=1}^{p} (\lambda_{p+1} - \lambda_k)\, a_k u_k = 0$$

Comme la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre, on a donc :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ a_k(\lambda_{p+1} - \lambda_k) = 0$$

Or, on sait que $\lambda_k \neq \lambda_{p+1}$, donc on a bien $a_k = 0$.
En réinsérant ces a_k dans l'égalité du départ, on obtient également $a_{p+1} = 0$.
Ainsi, la propriété est encore vraie au rang $p + 1$.
Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Proposition 21 ***Un cas particulier important***

1. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, n valeurs propres distinctes et si $u_1, \dots, u_n$ sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres, alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.*
   On dit que c'est une ***base de vecteurs propres****.*
2. *Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes.*

2.3.4 Polynômes annulateurs

Définition 22

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$.
Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme défini par

$$P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k = a_0 Id_E + a_1 f + \cdots + a_p f^p$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ la matrice définie par

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$$

Définition 23

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   On dit que P est un **polynôme annulateur de f** si $P(f) = 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   On dit que P est un **polynôme annulateur de A** si $P(A) = 0$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Montrons que P est un polynôme annulateur de A.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Donc

$$P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

Donc P est bien un polynôme annulateur de A.

Théorème 24

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit P un polynôme annulateur de f.
Alors, toute valeur propre de f est une racine de P.

Démonstration :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Notons u un vecteur propre de f associé à λ, on a donc $u \neq 0$ en particulier. On a donc

$$f(u) = \lambda u$$

$$f^2(u) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda^2 u$$

et par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k(u) = \lambda^k f(u)$$

Ainsi, si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^p$ est un polynôme annulateur de f, alors

$$P(f)(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k u = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k\right) u = (P(\lambda))\, u$$

Or, $P(f)(u) = 0$ puisque $P(f) = 0$. Ainsi, $(P(\lambda))u = 0$ et donc $P(\lambda) = 0$ puisque $u \neq 0$. On a donc bien montré que λ est une racine de P.

Remarque :

La réciproque est fausse : toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément des valeurs propres.

Exemple :

Déterminons les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a montré que $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$ était un polynôme annulateur. Or,

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X\left(X^2 - 3X + 2\right) = X(X-1)(X-2) = 0$$

On sait donc que les valeurs propres possibles sont parmi l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Il nous faut donc à présent vérifier si oui ou non 0, 1 et 2 sont valeurs propres ou non.

- $$AX = 0X \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

  Il n'y a pas de X non nul qui peut être solution de $AX = 0X$, donc 0 n'est pas valeur propre.

- $$AX = 1X \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = x \\ y - 2z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff z = 0$$

  Par exemple $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Donc 1 est une valeur propre de A.

– $$AX = 2X \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = 2x \\ y - 2z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

  Le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient : 2 est bien une valeur propre de A.

Ainsi, les valeurs propres de la matrice A sont 1 et 2.

Remarque :

Pour chercher les valeurs propres en pratique si on ne connaît pas de polynôme annulateur, on écrit la matrice

$$A - \lambda I_n$$

où λ est un scalaire dont on ne connaît pas la valeur, puis on triangularise cette matrice avec des opérations de Gauss pour en regarder le rang. Les valeurs de λ pour lesquelles le rang de la matrice n'est pas n fourniront exactement les valeurs propres.

2.4 Diagonalisation

2.4.1 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 25

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
  On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une **matrice diagonalisable** si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale } / \ A = PDP^{-1}$$

Remarque :

Un endomorphisme f est donc diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2.4.2 Théorèmes de réduction

Théorème 26

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ toutes les valeurs propres distinctes de f. Alors, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ diagonalisable } &\iff E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) \\ &\iff \sum_{k=0}^{p} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = n \end{aligned}$$

Remarque :

De même, une matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n

Théorème 27 ***Cas particulier : n valeurs propres***

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.*

Théorème 28 ***Cas particulier : 1 valeur propre***

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f n'admet qu'une seule valeur propre λ, alors f est diagonalisable si et seulement si $f = \lambda Id$.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A n'admet qu'une seule valeur propre λ, alors A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.*