

Révisions d'algèbre linéaire

1.1 Espaces vectoriels

On notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

1.1.1 Définitions

Définition 1

Soit E un ensemble, muni d'une loi d'addition $+$ et d'une loi de multiplication \cdot .

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel si

- (i) $(E, +)$ est un **groupe commutatif**, i.e.
 - $\forall u, v \in E, u + v \in E$ (la loi $+$ est interne)
 - $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$ (la loi $+$ est associative)
 - $\exists 0_E \in E$ tel que $\forall u \in E, u + 0_E = 0_E + u = u$ (existence d'un élément neutre)
 - $\forall u \in E, \exists v \in E / u + v = v + u = 0_E$ (on note $v = -u$) (opposé)
 - $\forall u, v \in E, u + v = v + u$ (la loi $+$ est commutative)
- (ii) l'opération \cdot vérifie :
 - $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall u \in E, \lambda \cdot u \in E$ (la loi \cdot est externe)
 - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
 - $\exists u \in E, 1 \cdot u = u$
 - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
 - $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

Les éléments de E sont appelés les **vecteurs** et ceux de \mathbb{K} sont appelés les **scalaires**.

Remarque :

On abrège toujours $\lambda \cdot u$ en λu

Exemples :

- E1** – \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- E2** – \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- E3** – \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel aussi
- E4** – $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- E5** – $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont des \mathbb{K} -espace vectoriels
- E6** – $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- E7** – \mathbb{R}^I est un \mathbb{R} -espace vectoriel

1.1.2 Combinaisons linéaires**Définition 2**

Soit (v_1, v_2, \dots, v_n) une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E . On appelle **combinaison linéaire** des $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ tout vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, λ_i est un scalaire, i.e. un élément de \mathbb{K} .

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille (v_1, \dots, v_n) est noté

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Exemple :

Posons

$$u = (1, -1, 2), \quad v = (5, 3, 1), \quad w = (-2, 2, -4)$$

Le vecteur $x = (3, -1, -3)$ appartient-il à $\text{Vect}(u, v, w)$?

On cherche donc s'il existe trois réels a, b, c tels que

$$x = au + bv + cw$$

On a

$$\begin{aligned} x = au + bv + cw &\iff (3, -1, -3) = a(1, -1, 2) + b(5, 3, 1) + c(-2, 2, -4) \\ &\iff (3, -1, -3) = (a + 5b - 2c, -a + 3b + 2c, 2a + b - 4c) \\ &\iff \begin{cases} a + 5b - 2c = 3 \\ -a + 3b + 2c = -1 \\ 2a + b - 4c = -3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 1 \\ a = 2c - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc par exemple :

$$x = 4u + v + 3w \in \text{Vect}(u, v, w)$$

Remarquons qu'ici le choix du triplet (a, b, c) n'est pas unique.

Définition 3

Soit (v_1, \dots, v_n) une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .
On dit que (v_1, \dots, v_n) est une **famille génératrice de E** lorsque

$$E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$$

autrement dit, tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille (v_1, \dots, v_n) .

Exemples :

E1 – La famille $(1, X, X^2, \dots, X^{n-1}, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$

E2 – La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{C}^3 .

Remarques :

R1 – Si on rajoute un vecteur à une famille génératrice, on a encore une famille génératrice.

R2 – Si on change l'ordre des vecteurs de la famille, on a encore une famille génératrice

R3 – Si un des vecteurs de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, on peut le retirer et avoir encore une famille génératrice

1.1.3 Sous-espaces vectoriels**Définition 4**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit F un sous-ensemble de E .

On dit que F est un **sous-espace vectoriel de E** si :

- F est non vide (par exemple, F contient le vecteur nul)
- F est stable par combinaison linéaire, i.e.

$$\forall u, v \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda u + v \in F$$

Un sous-espace vectoriel de E est alors lui-même un espace vectoriel.

Remarque :

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il peut être utile de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un ensemble plus gros qu'on sait être un espace vectoriel.

Exemple :

Soit $a \in \mathbb{C}$. Posons E l'ensemble des polynômes à coefficients complexes qui s'annulent en a . Montrer que E est un espace vectoriel.

On sait que $E \subset \mathbb{C}[X]$ puisque $E = \{P \in \mathbb{C}[X] / P(a) = 0\}$. Montrons donc que E est un sev de $\mathbb{C}[X]$.

- E est bien non vide puisque le polynôme nul s'annule en a .
- Soient $P, Q \in E$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrons que $\lambda P + \mu Q \in E$. En effet, on a

$$(\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a) = 0$$

donc E est bien stable par combinaison linéaire.

E est donc un sev de $\mathbb{C}[X]$ et c'est donc en particulier un espace vectoriel.

Remarque :

Si on arrive à mettre un sous-ensemble sous la forme d'un *Vect*, c'est toujours alors un sous-espace vectoriel de E

Exemple :

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Montrons que E est un espace vectoriel. En effet :

$$E = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi, E apparaît comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc c'est un espace vectoriel.

1.1.4 Familles libres et liées**Définition 5**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Une famille (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E est une **famille libre** si pour tout n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

- Une famille qui n'est pas libre est appelée une **famille liée**, autrement dit, elle est liée s'il existe une combinaison linéaire nulle de v_1, \dots, v_n

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

avec des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls.

Remarques :

R1 – Si un des vecteurs de la famille est nul, la famille est toujours liée

R2 – Les vecteurs d'une famille libre sont dits **linéairement indépendants**.

Exemples :

E1 – La famille $(1 + X + X^2, 3 + X + 5X^2, 2 + X + 3X^2)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{C}[X]$?

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$a(1 + X + X^2) + b(3 + X + 5X^2) + c(2 + X + 3X^2) = 0$$

Alors, on a nécessairement

$$\begin{aligned} (a + 3b + 2c) + (a + b + c)X + (a + 5b + 3c)X^2 = 0 &\iff \begin{cases} a + 3b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + 5b + 3c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = b \\ c = -2a \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a une infinité de solutions pour le triplet (a, b, c) . La famille n'est donc pas libre.

E2 – La famille $((1, 3, -3), (4, 2, -3), (-1, 7, 6))$ est-elle une famille libre de \mathbb{R}^3 ?

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$a(1, 3, -3) + b(4, 2, -3) + c(-1, 7, 6) = (0, 0, 0)$$

Alors, on a $(1 + 4b - c, 3a + 2b + 7c, -3a - 3b + 6c) = (0, 0, 0)$, autrement dit

$$\begin{cases} a + 4b - c = 0 \\ 3a + 2b + 7c = 0 \\ -3a - 3b + 6c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 4b - c = 0 \\ b = c \\ 3b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 4b - c = 0 \\ b = c \\ c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

Donc la famille est bien libre.

E3 – Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R}^{+*} . On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \ln(x), \quad f_4(x) = e^x$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre dans E ?

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$$

autrement dit

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, a + bx + c \ln(x) + de^x = 0$$

Le membre de gauche en 0^+ est équivalent à $c \ln(x)$ si $c \neq 0$ et alors la limite serait nécessairement $\pm\infty$, mais cela devrait être 0 d'après le membre de droite : c'est contradictoire. Nécessairement, on a donc $c = 0$.

Le membre de gauche en $+\infty$ est équivalent à de^x si $d \neq 0$ et alors la limite serait nécessairement $\pm\infty$, mais cela devrait être 0 d'après le membre de droite : c'est contradictoire. Nécessairement, on a donc $d = 0$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, a + bx = 0$$

Autrement dit, le polynôme $a + bX$ admet une infinité de racines dans \mathbb{R}^{+*} , donc est le polynôme nul. On a donc $a = b = 0$.

On a donc montré que la famille était libre.

Remarques :

R1 – Une famille ne contenant qu'un vecteur est toujours libre, sauf si le vecteur est nul.

R2 – Une famille (u, v) est liée si et seulement si les vecteurs sont colinéaires, i.e. s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

R3 – Si on enlève un vecteur à une famille libre, on obtient encore une famille libre.

R4 – Une famille de polynômes ayant des degrés étagés est toujours une famille libre.

1.2 Dimension des espaces vectoriels

1.2.1 Bases d'un espace vectoriel

Définition 6

Soit E un espace vectoriel et soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E . On dit que (e_1, \dots, e_n) est une **base de E** si cette famille est à la fois libre et génératrice de E .

Proposition 7

Une famille (e_1, \dots, e_n) est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, \dots, e_n , autrement dit

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E \iff \forall u \in E \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} / u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Les λ_i sont appelés les **coordonnées** de u dans la base (e_1, \dots, e_n) .

Remarque :

Attention, si on change l'ordre des vecteurs, les coordonnées changent !

Exemples :

E1 – La base canonique de \mathbb{K}^n est la base (e_1, \dots, e_n) définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{num } i}, 0, \dots, 0)$$

E2 – La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la base $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où l'unique 1 de la matrice apparaît sur la ligne i et la colonne j .

E3 – La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Définition 8

Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, qui admet au moins une famille génératrice finie. Alors toutes les bases de E possèdent le même nombre d'éléments : ce nombre est appelé la **dimension de E** , noté $\dim(E)$.

Remarque :

Par convention, la dimension de $\{0\}$ est égale à 0.

Exemples :

E1 – $\dim(\mathbb{K}^n) = n$

E2 – $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$

E3 – $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$

Proposition 9

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

1. Toute famille libre de n vecteurs est une base de E .
2. Toute famille libre possède au maximum n vecteurs.
3. Toute famille génératrice de n vecteurs est une base de E .
4. Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.

Théorème 10**Théorème de la Base Incomplète**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit (e_1, \dots, e_k) une famille libre de E . Alors il existe des vecteurs e_{k+1}, \dots, e_n tels que (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

1.2.2 Sommes de sev et sommes directes**Définition 11**

Soient F_1, \dots, F_p , p sous-espaces vectoriels de E . La somme $F_1 + \dots + F_p$ est définie comme l'ensemble :

$$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \{u_1 + u_2 + \dots + u_p, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_i \in F_i\}$$

C'est encore un sous-espace vectoriel de E .

Définition 12

On dit qu'une somme de sev $F_1 + \dots + F_p$ est **directe** si et seulement si la décomposition des vecteurs de $F_1 + \dots + F_p$ est unique.

On note alors la somme

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$$

Cas particulier : si F et G sont deux sev de E qui vérifient

$$E = F \oplus G,$$

on dit alors que F et G sont des **sous-espaces vectoriels supplémentaires**.

Proposition 13

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

Théorème 14**Formule de Grassmann**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Remarque :

On en déduit une autre caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires en dimension finie :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

1.3 Applications linéaires

1.3.1 Définitions

Définition 15

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que $f : E \rightarrow F$ est une **application linéaire** si :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarques :

R1 – Si $f : E \rightarrow E$ est linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.

R2 – Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.

R3 – Si f est un endomorphisme bijectif, on dit que f est un **automorphisme**.

Exemples :

E1 – Soient E et F deux \mathbb{K} -ev. L'application nulle $f : \begin{matrix} E & \rightarrow & F \\ u & \mapsto & 0_F \end{matrix}$ est une application linéaire.

E2 – Soit E un \mathbb{K} -ev. L'application identité $Id_E : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & u \end{matrix}$ est une application linéaire.

E3 – Soit E un \mathbb{K} -ev et soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. On appelle **homothétie vectorielle de rapport α** l'application linéaire suivante : $h_\alpha : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & \alpha u \end{matrix}$

1.3.2 Image et noyau

Définition 16

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **noyau** de l'application linéaire f et on note $\text{Ker}(f)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\text{Ker}(f) = \{u \in E / f(u) = 0_F\}$$

Remarques :

R1 – On a toujours $0 \in \text{Ker}(f)$

R2 – $\text{Ker}(f)$ est toujours un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 17

Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors l'équivalence suivante :

$$f \text{ injective} \iff \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Définition 18

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **image de f** le sous-ensemble $\text{Im}(f)$ de F défini par

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{v \in F / \exists u \in E, f(u) = v\}$$

Remarques :

R1 – On a toujours $0_F \in \text{Im}(f)$

R2 – $\text{Im}(f)$ est toujours un sous-espace vectoriel de F .

Proposition 19

Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors l'équivalence suivante :

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im}(f) = F$$

1.3.3 Rang**Définition 20**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, on appelle **rang de f** la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Théorème 21**Théorème du rang**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E)$$

1.4 Pivot de Gauss sur les matrices

La méthode du pivot de Gauss est une méthode qui peut s'appliquer sur des matrices (ou sur des systèmes d'équations). Le but de cette méthode est de transformer notre matrice de départ en une matrice qui soit triangulaire. La matrice obtenue est dite **équivalente** à la matrice de départ.

1.4.1 Opérations élémentaires

Définition 22

On appelle **opérations élémentaires sur les lignes** les opérations suivantes :

- $L_i \longleftrightarrow L_j$: on échange la ligne L_i et la ligne L_j
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$: on multiplie la ligne L_i par α
- $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $\alpha \neq 0$: on remplace la ligne L_i par la somme $\alpha L_i + \beta L_j$.

On appelle **opérations élémentaires sur les colonnes** les opérations suivantes :

- $C_i \longleftrightarrow C_j$: on échange la colonne C_i et la colonne C_j
- $C_i \leftarrow \alpha C_i$ avec $\alpha \neq 0$: on multiplie la colonne C_i par α
- $C_i \leftarrow \alpha C_i + \beta C_j$ avec $\alpha \neq 0$: on remplace la colonne C_i par la somme $\alpha C_i + \beta C_j$.

Remarque :

Il faut bien faire attention : lorsqu'on fait une opération $C_i \leftarrow \alpha C_i + \beta C_j$, il faut toujours s'assurer que α est non nul. Le coefficient β , lui, peut être choisi de manière quelconque.

1.4.2 Déterminer si une matrice est inversible

Proposition 23

Soit A une matrice et soit B la matrice équivalente obtenue après des opérations élémentaires. Alors A et B possèdent les mêmes propriétés d'inversibilité.

Exemple :

Cherchons si la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

Pour cela, on commence par appliquer les opérations du pivot de Gauss à la matrice A pour la transformer en une matrice triangulaire B . On regarde alors les termes diagonaux de la matrice B :

- S'il n'y a pas de 0, alors B est inversible et donc A est inversible.
- S'il y a un ou plusieurs 0, alors B n'est pas inversible et donc A n'est pas inversible.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

La matrice A est donc équivalente à une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale, donc A est inversible.

Remarques :

R1 – On n'est pas obligé de regarder toujours la méthode de Gauss !

Si on trouve une matrice B telle que $A \times B = I$, alors A est inversible et que $A^{-1} = B$.

R2 – Si on remarque une relation entre les colonnes de A (ou entre les lignes de A), alors on peut dire que A n'est pas inversible.

1.4.3 Calculer l'inverse d'une matrice

Proposition 24

Soit A une matrice inversible. On peut alors par opérations élémentaires sur les lignes uniquement la transformer en la matrice identité.

Si on applique exactement les mêmes opérations à la matrice identité dans le même ordre, on obtient alors la matrice A^{-1} .

Remarque :

La méthode marche également si on ne manipule QUE des colonnes, le tout est de ne pas mélanger lignes/colonnes

Exemple :

Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Puisqu'on fait les mêmes opérations sur les matrices A et I , on

les écrit côte à côte et on applique les opérations élémentaires pour déterminer A^{-1} .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 4 & 14 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 14 & -6 & -6 \\ -10 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 & \begin{pmatrix} -6 & 6 & -2 \\ -10 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 & \begin{pmatrix} -28 & 24 & -4 \\ -10 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{12}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{-1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.4 Calculer l'image, le rang et le noyau d'une matrice

Exemple :

Supposons que l'on veuille déterminer le noyau et l'image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On écrit A puis on ajoute au-dessous une matrice identité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, on fait des opérations élémentaires sur les colonnes uniquement pour échelonner au maximum la matrice du haut, quitte à faire apparaître des colonnes de zéros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$$

et enfin :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

Alors, on lit l'image de A et le noyau de A facilement :

- $\text{Im}(A)$ est le Vect des colonnes non nulles de la matrice du haut, une base de $\text{Im}(A)$ apparaît directement et on a le rang.
- $\text{Ker}(A)$ est le Vect des colonnes de la matrice du bas, situées en-dessous des colonnes nulles de la matrice du haut.

Ainsi, ici $\text{Im}(A) = \text{Vect}((1, 2, 1), (0, -3, 0))$ et $\text{Ker}(A) = \text{Vect}((1, -1, 1))$.