CHAPITRE 5

Calcul matriciel : rappels et compléments

5.1 L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

5.1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices ayant n lignes et p colonnes. On dit alors que les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ont un **format** (n,p).
Lorsque $n = p$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. Dans ce cas, on dit que les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **de taille** n ou bien **d'ordre** n.

Proposition 2

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, on peut sommer deux matrices ayant le même format et multiplier une matrice par un scalaire. La matrice nulle est notée simplement 0 ou $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$

Définition 3

On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé en ligne i et colonne j, qui vaut 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ forme alors une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En particulier on a donc :

$$\boxed{\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np}$$

Exemple :

Dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.1.2 Produit de matrices

Définition 4

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices telles que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
Alors, on peut définit la matrice $C = AB$, qui est une matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.
En notant $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $AB_1 = AB_2 = 0$.

Remarque :

Rien qu'avec les exemples précédents, on voit que :
- le produit matriciel n'est pas commutatif : $AB \neq BA$
- si $AB = 0$, cela n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$: le produit n'est pas intègre.
- si $AB_1 = AB_2$, cela n'implique pas que $B_1 = B_2$, on ne peut pas "simplifier" les matrices de chaque côté

Cependant, la factorisation est possible, soit à droite, soit à gauche :

$$A_1 B + A_2 B = (A_1 + A_2)B \quad \text{et} \quad BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2)$$

5.1.3 Puissances et polynômes d'une matrice carrée

Définition 5

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On note par convention $A^0 = I_n$, matrice identité d'ordre n, puis on pose pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$$

Remarque :

Un cas particulier où on peut facilement calculer les puissances d'une matrice : lorsqu'elle est **diagonale**.
Si on note $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$.

Théorème 6

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\boxed{(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}} \qquad \textit{(formule du binôme de Newton)}$$

et

$$\boxed{A^k - B^k = (A-B) \sum_{j=0}^{k-1} A^j B^{k-1-j} = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \cdots + AB^{k-2} + B^{k-1})}$$

Définition 7
Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$.

Exemple :

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$, donc N est nilpotente d'ordre 3.

Remarque :

Lorsqu'une matrice M peut s'écrire $M = I_n + A$ avec A nilpotente, la formule du Binôme s'écrit facilement pour M^n et beaucoup de termes sont nuls (car A^k est nul dès que k est supérieur à un indice donné).
Ex : pour N ci-dessus, on a :

$$(I_n + N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} N^j = I_n + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2 + 0$$

Définition 8
Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On définit la matrice $P(A)$ par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_d A^d$$

Théorème 9
Toute matrice carrée A admet un polynôme annulateur P tel que $P(A) = 0$

Démonstration :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$. Donc si on prend la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$, la famille comporte $n^2 + 1$ éléments dans un espace vectoriel de dimension n^2, donc cette famille est nécessairement liée : on peut exprimer une de ces matrices comme une combinaison linéaire des autres, et cela nous donne une relation polynomiale sur la matrice A.

5.1.4 Transposition

Définition 10
La transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice notée ${}^tA$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que la i-ième colonne de ${}^tA$ correspond à la i-ième ligne de A.

Remarques :

R 1 – La transposition est une application linéaire, autrement dit on a :

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \qquad \text{et} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$$

R 2 – Attention aux manipulation de transposées avec des produits :

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA}$$

5.2 Noyau et image d'une matrice

5.2.1 Image d'une matrice

Définition 11

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont on nomme les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$.
On appelle alors **image de A** l'ensemble :

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = Vect(C_1, C_2, \dots, C_p)} = \{AX \ / \ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

Remarque :

$\mathrm{Im}(A)$ est un Vect, donc par définition c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Il contient uniquement des matrices colonnes à n lignes.

Définition 12

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de la matrice A :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(Vect(C_1, C_2, \dots, C_p)}$$

Remarque :

$\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En particulier, on doit avoir $\dim(\mathrm{Im}(A)) \leqslant \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$. Ainsi : $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$. Par ailleurs, $\mathrm{Im}(A) = Vect(C_1, C_2, \dots, C_p)$. Donc on connaît déjà une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$ qui contient p éléments. La dimension de $\mathrm{Im}(A)$ sera donc au maximum p : $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$. Finalement :

$$\boxed{\text{si } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad 0 \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminons $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{rg}(A)$.

On a : $\mathrm{Im}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
(La dernière colonne étant proportionnelle à la première, on peut l'enlever de la famille génératrice).
Pour déterminer le rang de A, on doit avoir la dimension de $\mathrm{Im}(A)$, donc le cardinal d'une base. La famille génératrice précédente est-elle libre ?

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = -b \\ -4b - b - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = b = c = 0$$

La famille est bien libre, c'est une base de $\mathrm{Im}(A)$, donc $\mathrm{rg}(A) = 3$.

5.2.2 Noyau d'une matrice

Définition 13

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle alors **noyau de A** l'ensemble :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0\}}$$

Remarque :

On peut montrer également que $\operatorname{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Il contient uniquement des matrices colonnes, à p lignes.
En particulier, on voit que $\dim(\operatorname{Ker}(A)) \leqslant \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))$, donc la dimension de $\operatorname{Ker}(A)$ doit être inférieure au nombre de colonnes de A.

Exemple :

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et déterminons le noyau de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$X \in \operatorname{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff \left\{\begin{aligned} x + 2y - t &= 0 \\ 2x - y + z - 2t &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x + 2y - t &= 0 \\ 2x - 2y - 2t &= 0 \\ z &= -y \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= -y = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\operatorname{Ker}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Remarque :

Déterminer <u>un élément du noyau d'une matrice</u> revient à déterminer une <u>relation linéaire nulle sur les colonnes de cette matrice</u>.

Par exemple, prenons la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

- On peut remarquer que : $C_1 + C_2 = 0$. On a donc $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Autrement dit, le fait que $C_1 + C_2 = 0$ revient à dire que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\operatorname{Ker}(B)$.
- De même, $2C_1 - C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(B)$
- Egalement $2C_2 + C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(B)$

Plus généralement, si A est une matrice dont les colonnes sont notées $C_1, C_2, \dots, C_p$, alors :

$$\boxed{a_1C_1 + a_2C_2 + \cdots + a_pC_p = 0 \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A)}$$

5.2.3 Théorème du rang

Théorème 14 ***Théorème du rang***

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec donc p colonnes. Alors :

$$\boxed{p = \dim(Ker(A)) + rg(A)}$$

Remarque :

Ce théorème permet de faire un lien entre les dimension de $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$

Exemples :

E 1 – Déterminer l'image, le rang et le noyau de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On sait que $\mathrm{Im}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \boxed{Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

Puisque $\mathrm{Im}(A)$ est engendré par un vecteur non nul, on a $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 1 = \mathrm{rg}(A)$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$.

Pour déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$, il nous suffit donc de déterminer une famille libre de cardinal 2 dans $\mathrm{Ker}(A)$. Pour cela cherchons des relations sur les colonnes de la matrice.

On a $C_1 = C_2$, donc $C_1 - C_2 = 0$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$.

On a $C_1 = C_3$, donc $C_1 - C_3 = 0$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$.

On a déterminé déjà deux vecteurs dans $\mathrm{Ker}(A)$, qui sont non colinéaires : ils forment donc une famille libre, donc une base (car de cardinal 2) de $\mathrm{Ker}(A)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

E 2 – Déterminer l'image, le rang et le noyau de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On a $2C_1 = C_3$, donc $2C_1 - C_3 = 0$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B)$.

On a donc $\dim(\mathrm{Ker}(B)) \geqslant 1$ et par théorème du rang, $\mathrm{rg}(B) \leqslant 2$.

Or, $\mathrm{Im}(B)$ contient déjà la famille (C_1, C_2) qui est libre (car deux vecteurs non colinéaires), donc on a $\dim(\mathrm{Im}(B)) \geqslant 2$.

Finalement, on en déduit que : $\dim(\mathrm{Im}(B)) = 2$ et$\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$. De plus, puisqu'on a déjà déterminé une famille libre de 2 éléments dans $\mathrm{Im}(B)$ et une famille libre de 1 élément dans $\mathrm{Ker}(B)$, ce sont des bases de $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(B)$:

$$\mathrm{Im}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

5.3 Matrices inversibles

5.3.1 Définition

Définition 15

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** lorsqu'il existe une matrice B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Dans ce cas, la matrice B est unique, appelée **inverse de** A et on note $A^{-1} = B$.

Remarque :

Si on trouve une matrice B telle que $AB = I_n$, alors nécessairement A est inversible et $B = A^{-1}$. De même, si on trouve une matrice C telle que $CA = I_n$, alors nécessairement C est inversible et $C = A^{-1}$.

Définition 16

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque :

Cet ensemble est stable par produit, autrement dit, si A et B sont inversibles, alors AB est encore inversible et on a :

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

En particulier, si une matrice A est inversible, alors A^2, A^3, A^4, ... le sont aussi.

Proposition 17

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si, pour toute matrice colonne Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Y = AX$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a alors : $X = A^{-1}Y$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible et si oui que vaut A^{-1} ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors :

$$AX = Y \iff \begin{cases} x + z &= a \\ y + z &= b \\ x + y + z &= c \end{cases} \iff \begin{cases} x &= c - b \\ z &= a + b - c \\ y &= -a + c \end{cases}$$

$$\iff Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X$$

Donc A est inversible et on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 18

Une matrice carrée est inversible si et seulement si ses colonnes forment une famille libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, autrement dit si et seulement si les colonnes de la matrice forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque :

En particulier, si deux colonnes de la matrice sont proportionnelles, si une colonne est nulle ou s'il y a une relation entre plusieurs colonnes, la matrice ne sera pas inversible.
La matrice est inversible si et seulement si aucune colonne ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Conséquence 19

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\boxed{A \text{ est inversible} \iff Ker(A) = \left\{O_{M_{n,1}(\mathbb{K})}\right\} \iff rg(A) = n}$$

Exemples :

E 1 – Matrices de taille 2

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ inversible } \iff ad - bc \neq 0}$$

Cela vient simplement du fait que les colonnes) doivent ne pas être proportionnelles.

E 2 – Matrices diagonales

$$\boxed{D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ inversible } \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k \neq 0}$$

E 3 – Matrices triangulaires

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. A l'inverse, une matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement s'il y a au moins un zero sur sa diagonale.

E 4 – Matrices ayant un polynôme annulateur

Si une matrice A vérifie une relation du type :

$$A^3 + 3A^2 - 5A + 2I_n = 0$$

alors on a :

$$A^3 + 3A^2 - 5A = -2I_n \iff A \times (A^2 + 3A - 5I_n) = -2I_n \iff A\left(-\frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A + \frac{5}{2}I_n\right) = I_n$$

La matrice A est alors inversible et son inverse est $A^{-1} = \left(-\frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A + \frac{5}{2}I_n\right)$.

Plus généralement si une matrice A vérifie une relation polynomiale du type

$$P(A) = 0$$

avec P un polynôme dont le terme constant est non nul, alors la matrice A est nécessairement inversible.

5.3.2 Opérations élémentaires sur une matrice

Définition 20

On appelle **opération élémentaire** sur une matrice toute opération d'un des types suivants :

- $L_i \longleftrightarrow L_j$ (échange de lignes)
- $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ avec $\boxed{\alpha \neq 0}$ (multiplication par un scalaire non nul)
- $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$ avec $\beta \in \mathbb{K}$ (ajout d'une CL d'une autre ligne)
- $L_i \longleftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $\boxed{\alpha \neq 0}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ (combinaison des deux opérations précédentes)

- $C_i \longleftrightarrow C_j$ (échange de colonnes)
- $C_i \longleftarrow \alpha C_i$ avec $\boxed{\alpha \neq 0}$ (multiplication par un scalaire non nul)
- $C_i \longleftarrow C_i + \beta C_j$ avec $\beta \in \mathbb{K}$ (ajout d'une CL d'une autre colonne)
- $C_i \longleftarrow \alpha C_i + \beta C_j$ avec $\boxed{\alpha \neq 0}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ (combinaison des deux opérations précédentes)

Remarque :

Appliquer une opération élémentaire à une matrice revient à la multiplier à gauche ou à droite par une matrice inversible. En particulier, appliquer une opération élémentaire à une matrice ne change pas l'inversibilité ou non de la matrice.
Plus précisément, appliquer une opération élémentaire à une matrice ne modifie pas son rang.
Cependant, cela modifie la matrice (puisqu'on l'a multipliée par une autre), on dit qu'on obtient une matrice équivalente.

Définition 21

Soient A et B deux matrices. On dit que **deux matrices A et B sont équivalentes** si on peut passer de A à B par des opérations élémentaires. On note alors $A \sim B$.

Proposition 22

Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Remarque :

Plus particulierièrement, toute matrice de format (n,p) de rang r peut être rendue équivalente, en appliquant par exemple la méthode du pivot de Gauss, à la matrice $J_{n,p,r}$ suivante :

$$J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r,p-r} \\ \hline O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{array}\right).$$

En particulier, si on part d'une matrice A, si en faisant des opérations on arrive à la transformer en $J_{n,p,r}$, en utilisant exactement les mêmes opérations sur ${}^tA$ en inversant lignes et colonnes, on va transformer ${}^tA$ en $J_{p,n,r}$, donc on en déduit que A et ${}^tA$ ont le même rang.

Théorème 23

Soit A une matrice de format (n,p). Alors A a le même rang que sa transposée ${}^tA$.

Remarque :

Cela signifie en particulier que tout ce qu'on avait énoncé pour les colonnes reste valable pour les lignes : si une matrice a une ligne nulle, deux lignes proportionnelles, ou plus généralement une relation sur ses lignes, elle ne sera pas inversible.

Théorème 24 ***Algorithme de Gauss-Jordan***

Pour déterminer si une matrice A est inversible et déterminer son inverse, on transforme A en I_n à l'aide d'opérations élémentaires uniquement sur les lignes (ou uniquement sur les colonnes). Parvenir à cette transformation revient à dire que A est inversible, et pour trouver A^{-1}, on recommence exactement toutes les opérations réalisées, dans le même ordre en partant de I_n, la matrice obtenue est alors A^{-1}.

Démonstration :

Imaginons que, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, on transforme A en I_n. Cela signifie qu'on a multiplié à gauche A successivement par plusieurs matrices $M_1, M_2, \ldots, M_k$ correspondant aux opérations élémentaires sur les lignes et que :

$$(M_k M_{k-1} M_{k-2} \cdots M_1)A = I_n$$

Puisqu'on a écrit cette relation, cela montre bien que A est inversible et donc :

$$A^{-1} = M_k M_{k-1} M_{k-2} \cdots M_1 = (M_k M_{k-1} M_{k-2} \cdots M_1) I_n$$

De même, si on a transformé A en I_n à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes, on a une égalité du type :

$$A(N_1 N_2 \cdots N_{k-1} N_k) = I_n$$

donc A est inversible et $A^{-1} = N_1 N_2 \cdots N_k = I_n(N_1 N_2 \cdots N_k)$.

Remarque :

Cette méthode fonctionne uniquement si on ne mélange pas les opérations lignes/colonnes.

5.3.3 Calcul du rang d'une matrice

Définition 25

Une matrice est échelonnée si elle peut être écrite sous une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \cdots & & & & & \\ \star & \vdots\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \star & \vdots\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & \cdots & & & & \\ \star & \star & \vdots\ 0 & 0 & 0 & \\ & & \cdots & & & \\ \star & \star & \star & \vdots\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star & \vdots \\ & & \cdots & \cdots & \\ \star & \star & \vdots\ 0 & 0 & \\ & \cdots & & & \\ \star & \vdots\ 0 & 0 & 0 & \\ \cdots & & & & \\ \vdots\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

échelonnée sur les colonnes — échelonnée sur les lignes

Proposition 26

Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée. De plus, le rang d'une matrice échelonnée sur les colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles ; le rang d'une matrice échelonnée sur les lignes est égal au nombre lignes non nulles.

Remarque :

Pour calculer le rang d'une matrice (et donc savoir si elle est inversible) on peut donc agir sur les lignes ou sur les colonnes, pour trouver une matrice équivalente plus simple sur laquelle on peut facilement lire le rang

5.4 Éléments propres d'une matrice carrée

5.4.1 Valeurs propres d'une matrice carrée

Définition 27
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que **λ est une valeur propre de A** si la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminons les valeurs propres de la matrice A.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{aligned}$$

Alors :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \iff A - \lambda I_3 \text{ non inversible} \iff \begin{cases} -\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ 3\lambda - \lambda^2 = 0 \end{cases} \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 3$$

Définition 28
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **spectre de A** l'ensemble des valeurs propres de A, on le note $\mathrm{Sp}(A)$.

Remarques :

R 1 – Une matrice n'admet pas forcément de valeurs propres.

R 2 – Une matrice de taille n admet au maximum n valeurs propres distinctes.

R 3 – Par définition,

$$A \text{ n'est pas inversible} \iff 0 \text{ est valeur propre de } A$$

et

$$A \text{ est inversible} \iff 0 \text{ n'est pas valeur propre de } A$$

Proposition 29
Les valeurs propres d'une matrice A triangulaire sont exactement ses termes diagonaux.

5.4.2 Vecteurs propres et sous-espaces propres

Proposition 30

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A) &\iff Ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\iff \exists\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0,\ /\ AX = \lambda X \end{aligned}$$

Définition 31

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in Sp(A)$, une valeur propre de A.
On appelle **vecteur propre de A** toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle qui vérifie la relation :

$$AX = \lambda X.$$

On appelle **sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ** l'ensemble $E_\lambda(A)$ suivant :

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ /\ AX = \lambda X\}.$$

Remarque :

On peut définir $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ pour tout réel λ. C'est toujours un sous-espace vectoriel.
Cet ensemble devient un sous-espace propre s'il est non réduit à zéro. Par définition, on a donc :

$$\lambda \in Sp(A) \iff \dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1$$

Exemple :

Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a vu qu'il y avait deux valeurs propres : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$.
Déterminons les sous-espaces propres correspondants.

- $\lambda = 0$. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Clairement $\mathrm{rg}(A) = 1$, donc par théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$. Puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent clairement à $\mathrm{Ker}(A)$ et sont non colinéaires, on a :

$$E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

- $\lambda = 3$. On a $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Puisque $A - 3I_3$ n'est pas inversible (car 3 est valeur propre), la matrice $A - 3I_3$ n'est pas de rang 3, et est de rang au moins 2 puisque les deux premières colonnes sont non colinéaires. Ainsi, $\mathrm{rg}(A - 3I_3) = 2$ et par théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(1 - 3I_3)) = 1$. Or, on a $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ dans la matrice $A - 3I_3$, donc :

$$E_3(A) = Vect(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Remarques :

R 1 – (Admis pour l'instant) Une matrice A de taille n admet au maximum n valeurs propres différentes.

R 2 – (Admis pour l'instant) Les sous-espaces propres d'une matrice A sont en somme directe dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En particulier, si on prend deux vecteurs propres U, V associés à deux valeurs propres différentes, la famille (U, V) est libre. De plus, on a toujours :

$$\boxed{\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) \leqslant n}$$

R 3 – Cas particulier important : **matrices dont on connait un polynôme annulateur**.
Cela nous permet de trouver les seules valeurs propres possibles de la matrice en question.
Exemple : soit A une matrice telle que :

$$A^2 - 3A + 2I_n = 0$$

Si λ est une valeur propre de A, alors il existe un vecteur propre associé, i.e. une matrice colonne X non nulle telle que $AX = \lambda X$. Remarquons que pour ce vecteur propre X, on a $A^2X = \lambda^2 X$, $A^3X = \lambda^3 X$,... et plus généralement $A^kX = \lambda^k X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'où :

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I_n = 0 &\Longrightarrow (A^2 - 3A + 2I_n)X = 0 \\ &\Longrightarrow A^2X - 3AX + 2X = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda^2 X - 3\lambda X + 2X = 0 \\ &\Longrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda + 2)X = 0 \\ &\Longrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \quad \text{car } X \neq 0 \\ &\Longrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $Sp(A) \subset \{1, 2\}$.
Autrement dit, les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.
Attention, avec ce raisonnement, nous n'avons pas montré que 1 et 2 sont des valeurs propres de A.

5.4.3 Matrices diagonalisables

Définition 32

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que **les matrices A et B sont semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Plus particulièrement, lorsqu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice diagonale, on dit que **la matrice A est diagonalisable**, autrement dit :

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale } / \ A = PDP^{-1}}$$

Remarque :

Si A est diagonalisable, alors la matrice diagonale admet sur sa diagonale les valeurs propres de A, et la matrice inversible P contient dans ses colonnes les vecteurs propres de A correspondants (Admis pour l'instant).

Remarque :

Lorsqu'une matrice est diagonalisable, il est alors très facile de calculer ses puissances.
En effet, si $A = PDP^{-1}$ pour une certaine matrice inversible P et D une matrice diagonale, on peut montrer par une récurrence immédiate que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$$

et puisque les puissances d'une matrice D diagonale sont faciles à calculer, on peut en déduire la valeur de la matrice A^n.

Théorème 33

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n}$$

Dans ce cas, il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A.
En notant P la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs propres, et D la matrice diagonale constituée des valeurs propres correspondantes, on a alors :

$$A = PDP^{-1}.$$

Exemple :

Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On a montré que A admettait deux valeurs propres 0 et 3.
On a vu que $E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, donc $\dim(E_0(A)) = 2$.
Par ailleurs, $E_3(A) = Vect(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, donc $\dim(E_3(A)) = 1$.

$$\dim(E_0(A)) + \dim(E_3(A)) = 3$$

On en déduit que la matrice A est diagonalisable.
En notant par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, on a : $A = PDP^{-1}$.

Proposition 34

- *Si une matrice A de taille n admet n valeurs propres distinctes, <u>alors</u> elle est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.*
- *Si une matrice A de taille n admet une unique valeur propre, alors*

$$A \text{ est diagonalisable} \iff A = \lambda I_n$$

Remarque :

Lorsqu'une matrice A n'admet qu'une seule valeur propre, on utilise en général un raisonnement par l'absurde. Si jamais elle était diagonalisable, alors elle s'écrirait $A = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda(PP^{-1}) = \lambda I_n$, et dans la plupart des cas, on a $A \neq \lambda I_n$.