CHAPITRE 4

Variables aléatoires réelles discrètes

4.1 Généralités sur les VARD

4.1.1 Définition

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
On appelle **variable aléatoire réelle** définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$$

c'est-à-dire l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant x\}$ est un événement de la tribu $\mathcal{A}$.

Remarques :

R 1 – Si on a pris $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle.

R 2 – Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est un ensemble fini, alors on dit que X est une **variable aléatoire réelle (discrète) finie**.

R 3 – Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est dénombrable, on sit que X est une **variable aléatoire réelle discrète infinie**.

R 4 – L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé l'**univers-image de X**, ou bien le **support de X**.

R 5 – Soit X une VAR discrète, définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour tout intervalle J dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in J\}$ est noté $[X \in J]$

Exemples :

E 1 – Lorsque $J = \{a\}$, on note $[X = a] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a\}$

E 2 – Lorsque $J =]-\infty, a]$, on note $[X \leqslant a]$.

E 3 – Lorsque $J = [a, b[$, on note $[a \leqslant X < b]$

Proposition 2

Une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un élément de $\mathcal{A}$.
En particulier, si X est une VAR, alors pour tout réel k, $[X = k]$ est un événement de $\mathcal{A}$.

Démonstration :

- Par définition on sait que $[X \leqslant x]$ est un événement de $\mathcal{A}$ pour tout réel x.
- $[X < x] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x - \frac{1}{k}\right]$, donc $[X < x]$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, donc appartient aussi à $\mathcal{A}$.
- $[X \geqslant x] = \overline{[X < x]}$ donc appartient bien à $\mathcal{A}$.
- $[X > x] = \overline{[X \leqslant x]}$ dont appartient bien à $\mathcal{A}$.
- Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors $[X \in I] = X^{-1}(I)$ est soit d'une des formes précédemment étudiées, soit une intersection de deux des ensembles précédents, donc est bien dans la tribu $\mathcal{A}$.

Exemples :

E 1 – On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Ω est l'ensemble des cartes, et on choisit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
A chaque carte $\omega \in \Omega$, on associe le réel $X(\Omega)$ défini par :
– $X(\omega) = 4$ si ω est un as,
– $X(\omega) = 3$ si ω est un roi,
– $X(\omega) = 2$ si ω est une dame,
– $X(\omega) = 1$ si ω est un valet,
– $X(\omega) = 0$ sinon.
Les valeurs possibles pour $X(\Omega)$ sont donc $0, 1, 2, 3, 4$, ainsi : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

E 2 – Un joueur lance sucessivement deux dés et note les deux numéros obtenus. L'univers de l'expérience est donc $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!] = \{(x, y), x, y \in [\![1, 6]\!]\}$.
On définit la VAR discrète X qui à chaque couple résultat associe la somme des deux nombres obtenus.
Ici, on a $X(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$. Donc X est une VAR discrète finie.

E 3 – On considère une succession infinie de lancers d'une pièce, dont la probabilité de faire Pile vaut p.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile, et on note $X = 0$ si jamais on n'obtient jamais Pile.
On suppose qu'il existe bien un modèle $(\Omega, \mathcal{A})$ décrivant cette expérience, de telle sorte que P_n : "on obtient Pile au n-ième lancer" soit un événement.
Ici, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[X = k]$ est un événement de la tribu $\mathcal{A}$ puisque :

$$\forall k \geqslant 1,\ [X = k] = \bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{P_j} \cap P_k \in \mathcal{A} \qquad \text{et} \qquad [X = 0] = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \overline{P_j} \in \mathcal{A}$$

X est bien une variable aléatoire. Par ailleurs, $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc X est une variable aléatoire discrète infinie.

Remarque :

Dans la pratique, on ne précise pas toujours Ω, mais il est indispensable de préciser $X(\Omega)$.

Proposition 3

Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
Alors la famille d'événements $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

4.1.2 Loi d'une VAR discrète

On considère à présent un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 4

On appelle **loi de probabilité** de la VAR discrète X la donnée de :

- $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, ensemble des valeurs prises par X,
- pour chaque $i \in I$, $p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$.

Remarques :

R 1 – Pour simplifier les notations, on notera simplement $\mathbb{P}([X = x_i]) = \mathbb{P}(X = x_i)$

R 2 – Quand on nous demande de déterminer la loi de X, on commence par donner $X(\Omega)$, puis pour chaque élément x_i de cet ensemble $X(\Omega)$, on donne $\mathbb{P}(X = x_i)$.

R 3 – Lorsque $X(\Omega)$ est fini et ne contient pas trop d'éléments, on peut présenter ses résultats sous forme de tableau avec dans la première ligne la valeur de x_i et dans la deuxième ligne $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Exemple :

Reprenons notre jeu de cartes (as = 4 pts, roi = 3pts, dame = 2pts, valet = 1pt, autres = 0 pt).
Déterminons la loi de X.

D'après l'énoncé, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

L'événement $[X = 0]$ est l'événement "obtenir une carte qui n'est pas un roi, une dame, un valet ou un as". Toutes les cartes ayant la même probabilité d'être choisies et comme il y a 16 cartes correspondant à notre événement, on a : $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$.

L'événement $[X = 1]$ est l'événement "obtenir un valet", donc $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

De même, on a $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \dfrac{1}{8}$.

Donc, on peut donner la loi de X sous la forme d'un tableau :

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

.

Théorème 5

Soit X une VAR discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors $\sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Remarque :

Comme $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements, on peut appliquer la Formule des Probabilités Totales : pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, on a : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}([X = x_i] \cap A) = \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}_{[X = x_i]}(A)$.

Théorème 6

Soit $\{(x_i, p_i),\ i \in I\}$ une partie de $\mathbb{R}^2$, où $I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$, ou une de leur partie finie.
Si :

- $\forall i \in I,\ p_i \geqslant 0$,
- $\sum\limits_{i \in I} p_i = 1$,

Alors, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une VAR discrète X définie sur Ω tels que $\{(x_i, p_i), i \in I\}$ est la loi de X.

4.1.3 Fonction de répartition

Définition 7

On appelle **fonction de répartition de X** l'application $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Proposition 8

La fonction de répartition d'une VAR discrète est une fonction en escalier.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent et notons F_X la fonction de répartition de X. On a :

- Soit $x \in]-\infty, 0[$. L'événement $[X \leqslant x]$ est impossible donc $F_X(x) = 0$.
- Soit $x \in [0, 1[$. La seule façon d'obtenir $X \leqslant x$ est d'avoir $X = 0$, donc $F_X(x) = \mathbb{P}(X = 0) = p_0 = \dfrac{1}{2}$
- Soit $x \in [1, 2[$. Alors $F_X(x) = p_0 + p_1 = \dfrac{5}{8}$
- Soit $x \in [2, 3[$. Alors $F_X(x) = p_0 + p_1 + p_2 = \dfrac{3}{4}$
- Soit $x \in [3, 4[$. Alors $F_X(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \dfrac{7}{8}$
- Soit $x \in [4, +\infty[$. Alors $F_X(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Proposition 9

Soit X une VAR discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit F_X sa fonction de répartition. Alors :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \in [0, 1]$,
2. *F_X est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$,*
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. *F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*

Démonstration :

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \in [0, 1]$ par définition d'une probabilité.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Alors $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$ et donc $\mathbb{P}(X \leqslant a) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant b)$, c'est-à-dire $F_X(x) \leqslant F_X(y)$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors $[a < X \leqslant b] = [X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]$, donc on a $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \leqslant a) = F_X(b) - F_X(a)$.

Théorème 10

Soit X une VAR discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit F_X sa fonction de répartition. On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. Si les x_i sont rangés dans l'ordre croissant, alors pour tout $i \in I$ tel que $1 - i \in I$ (on a alors $x_{i-1} < x_i$), on a :

$$\mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

Exemple :

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement deux boules avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la seconde boule, et Y le plus grand des deux numéros obtenus.
Déterminer la loi de Y.

La variable Y prend les valeurs $1, 2, 3, 4$, donc $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.
De plus, il est plus facile de calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$ que $\mathbb{P}(Y = k)$.
Par exemple :

$$\begin{aligned}[Y = 3] = ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 3]) \ \cup \ ([X_1 = 2] \cap [X_2 = 3]) \ \cup \ ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 3]) \ \cup \\ ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 1]) \ \cup \ ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 2])\end{aligned}$$

et

$$[Y \leqslant 3] = [X_1 \leqslant 3] \cap [X_2 \leqslant 3]$$

Notons F_Y la fonction de répartition de la loi de Y. On va donc calculer $F_Y(1)$, $F_Y(2)$, $F_Y(3)$, $F_Y(4)$.

- $F_Y(1) = \mathbb{P}(Y \leqslant 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.
- $F_Y(2) = \mathbb{P}(Y \leqslant 2) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant 2] \cap [X_2 \leqslant 2]) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant 1)\mathbb{P}(X_2 \leqslant 1) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4}$.
- $F_Y(3) = \mathbb{P}(Y \leqslant 3) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant 3] \cap [X_2 \leqslant 3]) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant 3)\mathbb{P}(X_2 \leqslant 3) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$.
- $F_Y(4) = \mathbb{P}(Y \leqslant 4) = 1$.

On peut alors en déduire la loi de la variable Y :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= F_Y(1) = \frac{1}{16} \\ \mathbb{P}(Y = 2) &= F_Y(2) - F_Y(1) = \frac{3}{16} \\ \mathbb{P}(Y = 3) &= F_Y(3) - F_Y(2) = \frac{5}{16} \\ \mathbb{P}(Y = 4) &= F_Y(4) - F_Y(3) = \frac{7}{16}\end{aligned}$$

Proposition 11

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors la fonction de répartition de X caractérise la loi.

Autrement dit, connaître la loi de X ($X(\Omega)$ et chaque $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$) est équivalent à connaître la fonction de répartition F_X de X.

4.1.4 Fonction d'une VARD

Définition 12

Soit X une VAR discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note alors $g(X)$ l'application composée $g \circ X$, autrement dit l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \; g(X)(\omega) = g(X(\omega))$$

Proposition 13

Soit X une VAR discrète définie sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors la variable $g(X) = Y$ est encore une VAR discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, vérifiant :

$$Y(\Omega) = \{g(x_i), i \in I\}$$

et

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{i \in I \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemple :

Soit X une VAR dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- Quelle est la loi de $Y = 2X + 1$?
  La variable Y prend les valeurs -3, 3 et 5. Donc $Y(\Omega) = \{-3, 3, 5\}$. De plus,
  - $\mathbb{P}(Y = -3) = \mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{4}$
  - $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$
  - $\mathbb{P}(Y = 5) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$
- Quelle est la loi de $Z = X^2$?
  La variable Z prend les valeurs 1 et 4. Donc $Z(\Omega) = \{1, 4\}$. De plus,
  - $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$
  - $\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}([X = -2] \cup [X = 2]) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$

4.2 Moments d'une VARD

Dans toute cette partie, on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère X une VAR discrète définie sur cet espace.
On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ ($I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou une partie finie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$).
On note enfin, $\forall i \in I, p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

4.2.1 Espérance

Définition 14

On dit que la variable X **admet une espérance** (ou que **l'espérance de X existe** lorsque l'un de ces deux cas se présente :
- soit I est fini
- soit I est infini et la série $\sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente.

On appelle alors **Espérance mathématique de X** le réel $\mathbb{E}[X]$ défini par

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)}$$

Remarques :

R 1 – $\mathbb{E}[X]$ représente une moyenne des valeurs prises par X, les coefficients étant ici les probabilités respectives de ces valeurs.

R 2 – Lorsque X est une VARD finie, X admet forcément une espérance puisque la somme est finie (aucun problème pour la calculer).

R 3 – Lorsque X est une VARD infinie, l'absolue convergence est obligatoire pour être certain qu'on puisse permuter les termes de la somme.

R 4 – Si, pour tout $i \in I$, on a $a \leqslant x_i \leqslant b$, on aura nécessairement $a \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant b$.

R 5 – En particulier, si $\forall i \in I, x_i \geqslant 0$, on doit avoir $\mathbb{E}[X] \geqslant 0$.

Exemple :

On donne 1 pour lancer un dé équilibré. Si on fait 1, 2, on ne gagne rien. Si on fait 3 ou 4, on gagne 1e, si on fait 5, on gagne 2e mais si on fait 6, on gagne 4e.
Soit X la fortune algébrique qu'il nous reste après avoir lancé le dé.
X prend les valeurs -1 (si on fait "1" ou "2"), 0 (si on fait "3" ou "4"), 1 (si on fait "5"), 3 si on fait "6". On a donc $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

x_i	-1	0	1	3
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X est une VARD finie, donc X admet une espérance. De plus,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k) = -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

On remarque que l'on a bien $-1 \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant 3$ puisque X prenait ses valeurs dans $\{-1, 0, 1, 3\}$.

Théorème 15 ***Théorème de transfert***

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si un de ces deux cas se présente :

- *soit I est fini*
- *soit I est infini et la série $\sum_{i \in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente,*

Alors la VAR $g(X)$ admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \sum_{i \in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemple :

On reprend notre jeu précédent, et on considère à présent la variable $Z = 2X^2 - 1$. Calculons $\mathbb{E}[Z]$. Comme X est une VARD finie, Z est également une VARD finie et donc Z admet bien une espérance. D'après le Théorème de Transfert, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[2X^2 - 1\right] \\
&= \sum_{k \in X(\Omega)} (2k^2 - 1)\mathbb{P}(X = k) \qquad = \left(2(-1)^2 - 1\right)\frac{1}{3} + (2(0)^2 - 1)\frac{1}{3} + \left(2(1)^2 - 1\right)\frac{1}{6} + \left(2(3)^2 - 1\right)\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{17}{6} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Corollaire 16

Si X admet une espérance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\mathbb{E}[X] + b$$

Définition 17

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance nulle, i.e.

$$\mathbb{E}[X] = 0$$

on dit que X est une **variable centrée**.

Proposition 18

Soit X une VAR discrète admettant une espérance $\mathbb{E}[X]$. Alors la variable aléatoire $X - \mathbb{E}[X]$ est une VAR discrète centrée, appelée la ***variable aléatoire centrée associée à la variable X.***

Démonstration :

$\mathbb{E}[X]$ est un réel. Donc d'après la proposition précédente $X - \mathbb{E}[X]$ admet bien une espérance et

$$\mathbb{E}\left[X - \mathbb{E}[X]\right] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0$$

4.2.2 Moment d'ordre r

Définition 19

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si la variable aléatoire X^r admet une espérance, on dit alors que **la variable X admet un moment d'ordre r** qui est le réel

$$m_r(X) = \mathbb{E}\left[X^r\right]$$

Remarques :

R 1 – Le moment d'ordre 1 est donc l'espérance de X.

R 2 – Si X est une VAR discrète finie, elle admet un moment de tout ordre $r \geqslant 1$

R 3 – En cas de convergence absolue, le théorème de transfert affirme que

$$\mathbb{E}\left[X^r\right] = \sum_{k \in X(\omega)} k^r \mathbb{P}(X = k)$$

Proposition 20

Soit $r \geqslant 1$. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet des moments d'ordre s pour n'importe quel $s \in [\![1, r]\!]$.

Démonstration :

Rappelons que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. Si I est fini, c'est évident.
Si I est infini ?
Soit $s \in [\![1, r]\!]$. Montrer que la série $\sum\limits_{i \in I} x_i^s \mathbb{P}(X = x_i)$ converge absolument.
Soit $i \in I$. Alors :

- si $|x_i| \geqslant 1$, $|x_i^s p_i| \leqslant |x_i^r p_i|$
- si $|x_i| \leqslant 1$, $|x_i^s p_i| \leqslant p_i$

Dans tous les cas, on a $|x_i^s p_i| \leqslant |x_i^r p_i| + p_i$.
Or, les séries $\sum\limits_{i \in I} |x_i^r p_i|$ et $\sum\limits_{i \in I} p_i$ convergent, donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{i \in I} |x_i^s p_i|$ converge. Ainsi, $\mathbb{E}[X^s]$ existe.

Corollaire 21

Si $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ existe, alors $\mathbb{E}\left[X\right]$ exste également.

Remarque :

La réciproque est fausse.

Exemple :

Soit X la VAR donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \lambda \frac{1}{n^3}$$

avec $\lambda = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}}$.
On a $n\mathbb{P}(X = n) = \lambda \frac{1}{n^2}$, donc $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge, et $\mathbb{E}[X]$ existe.
De plus, $n^2\mathbb{P}(X = n) = \lambda \frac{1}{n}$, donc $\sum n^2\mathbb{P}(X = n)$ diverge, et $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ n'existe pas.

4.2.3 Variance et écart-type

Définition 22

Soit X une VAR discrète admettant une espérance et telle que la variable $X-\mathbb{E}[X]$ admet un moment d'ordre 2.
On appelle alors **variance de la variable X** le réel :

$$\mathbb{V}[X]=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$$

De plus, lorsque $\mathbb{V}(X)$ existe, on appelle **écart-type de X** le réel

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

Remarques :

- **R 1** – Si X est une VARD finie, alors X admet bien entendu une variance.
- **R 2** – Si X n'admet pas d'espérance, X ne peut pas admettre de variance.
- **R 3** – La variance mesure la dispersion de la variable X par rapport à sa moyenne $\mathbb{E}[X]$

Théorème 23 ***Formule de König-Huygens***

Soit X une VAR discrète. Alors

$$\mathbb{V}[X] \text{ existe} \iff \mathbb{E}[X^2] \text{ existe}$$

Et en cas d'existence, on a :

$$\boxed{\mathbb{V}[X]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2}$$

Démonstration :

On admet la première équivalence. Pour la formule, on applique le Théorème de Transfert.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[X^2-2\mathbb{E}[X]X+(\mathbb{E}[X])^2\right]\\
&= \sum_{k\in X(\Omega)}(k^2-2\mathbb{E}[X]k+(\mathbb{E}[X])^2)\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k\in X(\Omega)}k^2\mathbb{P}(X=k)-2\mathbb{E}[X]\sum_{k\in X(\Omega)}k\mathbb{P}(X=k)+(\mathbb{E}[X])^2\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)\\
&= \mathbb{E}[X^2]-2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X]+(\mathbb{E}[X])^2\\
&= \mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2
\end{aligned}$$

Exemple :

Reprenons le cas du jeu de dés page 7. On avait calculé $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{3}$.
De plus, $\mathbb{E}[X^2]=\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)}k^2\mathbb{P}(X=k)=(-1)^2\frac{1}{3}+0^2\frac{1}{3}+1^2\frac{1}{6}+3^2\frac{1}{6}=2.$
Ainsi $\mathbb{V}[X]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2=2-\dfrac{1}{9}=\dfrac{17}{9}.$

Proposition 24

Soit X est une VAR discrète admettant une variance. Alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX+b$ admet également une variance et :

$$\mathbb{V}\left[aX+b\right] = a^2\mathbb{V}[X]$$

Démonstration :

Posons $Y = aX+b$. Comme X admet une espérance, on sait que Y admet une espérance et on a $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X]+b$. On a alors $(Y-\mathbb{E}[Y])^2 = (aX+b-a\mathbb{E}[X]-b)^2 = a^2\left(X-\mathbb{E}[X]\right)^2$. Comme $(X-\mathbb{E}[X])^2$ admet une espérance, alors la variable $(Y-\mathbb{E}[Y])^2$ admet une espérance également et donc Y admet bien une variance. De plus,

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}(Y-\mathbb{E}[Y])^2 = a^2\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = a^2\mathbb{V}[X]$$

Définition 25

Soit X une VAR discrète admettant une variance (et donc une espérance).
Si $\mathbb{E}[X]=0$ et si $\sigma(X)=1$, on dit que X **est une variable centrée réduite**.

Proposition 26

Soit X une VAR discrète admettant une variance non nulle (et donc une espérance). Alors la variable aléatoire X^* définie par :

$$X^* = \frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$$

est une VAR discrète centrée réduite appelée la ***variable aléatoire centrée réduite associée à X****.*

Démonstration :

En effet, $X^* = \frac{1}{\sigma(X)}X - \frac{\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$ du type $aX+b$. Donc puisque X admet une espérance et une variance, X^* admet bien une espérance et une variance. De plus,

$$\mathbb{E}[X^*] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sigma(X)}X - \frac{\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \frac{1}{\sigma(X)}\mathbb{E}[X] - \frac{\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)} = 0$$

et

$$\mathbb{V}[X^*] = \mathbb{V}\left[\frac{1}{\sigma(X)}X - \frac{\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \frac{1}{(\sigma(X))^2}\mathbb{V}[X] = 1$$

donc X^* est bien une variable aléatoire centrée réduite.

Remarque :

La notion de variable centrée et variable centrée réduite sera très importante dans un chapitre plus tard traitant de "convergences".

4.3 Lois discrètes usuelles

Dans toute cette partie, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

4.3.1 Loi uniforme

Modèle :

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On tire une boule dans l'urne et note X le numéro obtenu.
Les possibilités pour X sont donc $1, 2, 3, \ldots, n$ et par équiprobabilité, chaque boule a une probabilité de $\dfrac{1}{n}$ d'être tirée.

Définition 27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur** $[\![1, n]\!]$ si

$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![1, n]\!], \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}\left([\![1, n]\!]\right)$$

Remarque :

Plus généralement, on dit que X suit une **loi uniforme sur** $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (les x_i deux à deux distincts) si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \end{cases}}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}\left(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\right)$$

Proposition 28

Soit X une VAR qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = \frac{n^2 - 1}{12}}$$

Démonstration :

Puisque X est une variable finie (elle ne prend que n valeurs), X admet bien une espérance et une variance.

- $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n+1}{2}}$
- $\mathbb{E}[X^2] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \boxed{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}}$
- $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{n+1}{2}\left(\dfrac{2n+1}{3} - \dfrac{n+1}{2}\right) = \dfrac{n+1}{2}\dfrac{n-1}{6} = \dfrac{n^2-1}{12}$

4.3.2 Loi de Bernoulli

Modèle :

On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : un succès et un échec.
On suppose que le succès a une probabilité $p \in]0,1[$ de se réaliser (et l'échec a donc une probabilité $1-p$ de se réaliser).
On définit la variable X en posant $X = 1$ si on a le succès et $X = 0$ sinon. On a donc $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$.

Définition 29

Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\}, \\ \mathbb{P}(X=1) = p, \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}}$$

On note alors

$$X \leadsto \mathcal{B}(p) \qquad \text{ou} \qquad X \leadsto \mathcal{B}(1,p)$$

Proposition 30

Soit X une VAR qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = p}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = p(1-p)}$$

Démonstration :

Puisque X est une variable finie (elle prend exactement 2 valeurs), X admet bien une espérance et une variance.

- $\mathbb{E}[X] = 0\mathbb{P}(X=0) + 1\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1) = p$
- $\mathbb{E}[X^2] = 0^2\mathbb{P}(X=0) + 1^2\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1) = p$
- $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$

4.3.3 Loi binomiale

Modèle :

1. On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : un succès et un échec.
2. On suppose que le succès a une probabilité $p \in]0,1[$ de se réaliser (et l'échec a donc une probabilité $1-p$ de se réaliser).
3. On répète n fois cette expérience dans les mêmes conditions de manière indépendante.
4. On compte X le nombre de fois où on a obtenu un succès lors de ces n épreuves.

La variable X peut donc prendre toutes les valeurs de 0 à n.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Cherchons $\mathbb{P}(X=k)$, i.e. la probabilité qu'on ait eu exactement k succès sur l'expérience.

- Parmi les n épreuves, il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les numéros des k succès.
- Chacun de ces $\binom{n}{k}$ événements est réalisé avec une probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$.

On a donc $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Définition 31

Soit $p \in]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi Binomiale de paramètres n et p** si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = [\![0,n]\!], \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$$

Remarque :

> La loi de Bernoulli est donc un cas particulier (lorsqu'on fait une unique expérience), et c'est pourquoi on peut écrire la notation $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$ pour une loi de Bernoulli de paramètre p.

Proposition 32

Soit X une VAR qui suit la loi Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = np}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = np(1-p)}$$

Démonstration :

Puisque X est une variable finie (elle prend exactement $n+1$ valeurs au maximum), X admet bien une espérance et une variance.

Supposons $n \geqslant 2$ (sinon on retrouve une variable de Bernoulli qu'on connaît déjà).

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n\sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell=k-1}}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}p^{\ell+1}(1-p)^{n-\ell-1}] = np\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{(n-1)-\ell} = np \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= np + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np + \sum_{k=2}^{n} n(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= np + \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} = np + n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}p^{\ell+2}(1-p)^{n-2-\ell} \\ &= np + n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

- $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np\,(1+(n-1)p-np) = np(1-p)$

4.3.4 Loi géométrique

Modèle :

1. On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : un succès et un échec.
2. On suppose que le succès a une probabilité $p \in]0,1[$ de se réaliser (et l'échec a donc une probabilité $1-p$ de se réaliser).
3. On répète cette expérience dans les mêmes conditions de manière indépendante (a priori une infinité de fois).
4. On compte X le numéro du lancer où apparaît pour la première fois le succès.

La variable X peut donc prendre toutes les valeurs de 1 jusqu'à l'infini. : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$

Notons A_i l'événement "le succès est réalisé à la i-ième expérience".
Notons B l'événement "le succès n'est jamais réalisé". On a $B = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = 0$$

On peut donc considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ seulement : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1}p$.

Définition 33
Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi Géométrique de paramètre p** si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p \end{cases}}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$$

Proposition 34
Soit X une VAR qui suit la loi Géométrique de paramètres $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}}$$

Démonstration :

$\sum\limits_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}p = p\sum\limits_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$.

On reconnaît une série dérivée géométrique de raison $1-p$ qui converge (car $p \in [0,1]$, donc $|1-p| < 1$). Ainsi, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(X = k)$ converge et X admet bien une espérance. De plus,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$$\sum_{k\geqslant 1} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k\geqslant 1} k^2(1-p)^{k-1}p = p\left((1-p)\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \sum_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}\right).$$

On reconnaît deux séries dérivées géométriques (première et seconde) de raison $1-p$ qui convergent (car $p \in [0,1]$, donc $|1-p| < 1$). Ainsi, la série $\sum_{k \geqslant 1} k^2 \mathbb{P}(X=k)$ converge et X^2 admet bien une espérance. Ainsi, X admet bien également une variance.

$$\mathbb{E}[X^2] = p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1} +\infty k(1-p)^{k-1} = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$$

Donc

$$\mathbb{V}[X] = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p)+(p-1)}{p^2} = \frac{-(p-1)}{p^2}$$

4.3.5 Loi de Poisson

Définition 35

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre λ** si

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}, \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \end{cases}}$$

On note alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

Remarque :

On ne dispose pas de situation concrète simple qui est modélisée la loi de Poisson.

Proposition 36

Soit X une VAR qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Alors X admet une espérance et une variance qui sont :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \lambda}, \qquad \boxed{\mathbb{V}[X] = \lambda}$$

Démonstration :

$\sum_{k \geqslant 0} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k \geqslant 0} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k \geqslant 1}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{\ell \geqslant 0}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}$

On reconnaît une série exponentielle de raison λ qui converge donc. Ainsi, la série $\sum_{k \geqslant 0} k\mathbb{P}(X=k)$ converge et X admet bien une espérance. De plus,

$$\mathbb{E}[X] = \lambda e^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

De même, on montrerait que la série $\sum_{k \geqslant 0} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge, donc X^2 admet une espérance, donc X admet bien une variance, et on aura $V[X] = \lambda$.

4.4 Couples de VARD

4.4.1 Loi d'un couple

Définition 37

On appelle **couple de variables aléatoires réelles discrètes** et note (X,Y) toute application

$$(X,Y) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Autrement dit, à chaque issue de notre expérience, on associe un vecteur dont chaque composante est une variable aléatoire.

Définition 38

On appelle **loi du couple** (X,Y) ou encore la **loi conjointe des VAR** X **et** Y la donnée de :

- $(X,Y)(\Omega) = \{(x_i, y_i),\ x_i \in X(\Omega)\ /\ y_j \in Y(\Omega)\}$
- $\forall x_i \in X(\Omega),\ \forall y_j \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$

Exemples :

E 1 – Une urne contient deux boules blanches, trois boules rouges et quatre boules bleues.
On tire simultanément trois boules de l'urne.
On note X le nombre de boules blanches parmi ces 3 boules, et Y le nombre de boules rouges.

Déterminons la loi du couple (X,Y).

On a $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.
Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$.

- Déjà si $i + j \geqslant 4$, l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ est impossible et donc
$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$$
- Si $i + j \leqslant 3$, l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ signifie que l'on a tiré i boules blanches, j boules rouges et $3 - i - j$ boules bleues. Le nombre de façons d'obtenir une telle combinaison est donc $\dbinom{2}{i}\dbinom{3}{j}\dbinom{4}{3-i-j}$ parmi les $\binom{9}{3} = 84$ façons possibles de tirer trois boules de l'urne. On a donc
$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\dbinom{2}{i}\dbinom{3}{j}\dbinom{4}{3-i-j}}{\dbinom{9}{3}}$$

On a donc après calculs :

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{84}$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	0
2	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	0	0

E 2 – On réalise une succession de lancers d'une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir Face est $q = 1-p$.
On note X le rang d'apparition du premier Pile et Y le rang d'apparition du deuxième Pile.

Quelle est la du couple (X,Y) ?

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Calculons $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])$.

- Il est impossible que le deuxième Pile arrive avant le premier Pile.
  Si $i \geqslant j$, on a :
  $$\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = 0$$
- Si $i < j$, on a $[X=i] \cap [Y=j] = F_1 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j-1} \cap P_j$, donc on a :
  $$\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = q^{i-1}pq^{j-i-1}p = q^{j-2}p^2$$

Proposition 39

L'ensemble $([X=i] \cap [Y=j])_{i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)}$ forme un système complet d'événements.
En particulier, on a :
$$\sum_{\substack{i \in X(\Omega) \\ j \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}\left([X=i] \cap [Y=j]\right) = 1$$

Remarque :

Dans le tableau à double entrée, on a donc toujours la somme de toutes les valeurs du tableau égale à 1.

4.4.2 Lois marginales

Définition 40

Soit (X,Y) un couple de VAR discrètes.
La loi de X et la loi de Y sont appelées les **lois marginales du couple** (X,Y).

Remarque :

Si on connaît la loi du couple (X,Y), on peut en déduire la loi de X et la loi de Y grâce à la Formule des Probabilités Totales, en utilisant le système complet d'événement $([Y=j])_{j \in Y(\Omega)}$ (resp. le système complet d'événements $([X=j])_{j \in X(\Omega)}$).

Proposition 41

Soit (X,Y) un couple de VAR discrètes. Alors, on a :
$$\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X=k) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=j])$$
$$\forall k \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{j \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k])$$

Exemple :

Si on reprend l'exemple 1, il suffit donc de sommer les lignes et les colonnes du tableau pour obtenir les lois marginales de X et Y à partir de la loi du couple (X, Y).

$X \ \backslash \ Y$	0	1	2	3	Loi de X
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{12}$
Loi de Y	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$	1

Par exemple, déterminons la loi de Y.
On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. De plus, la famille $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$ forme un système complet d'événements.
La formule des probabilités totales donne alors que

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} = \boxed{\frac{5}{21}}$$

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{3}{14} + \frac{2}{7} + \frac{1}{28} = \boxed{\frac{15}{28}}$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2]) = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + 0 = \boxed{\frac{3}{14}}$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 3]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 3]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 3]) = \frac{1}{84} + 0 + 0 = \boxed{\frac{1}{84}}$$

4.4.3 Lois conditionnelles

Définition 42

Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes.
Soit $y \in Y(\Omega)$.
On appelle **loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$** la loi de la variable X sachant l'événement $[Y = y]$, autrement dit, la donnée de :

- $X(\Omega)$
- $\forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}_{[Y=y]}(X = k)$

On définit de même pour tout $x \in X(\Omega)$ la **loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$**.

Exemple :

On reprend le premier exemple (tirages des 3 boules dans l'urne).
Déterminons la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 2]$.

- On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
- $\mathbb{P}_{[Y=2]}(X = 2) = \dfrac{\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2])}{\mathbb{P}(Y = 2)} = 0$

- $\mathbb{P}_{[Y=2]}(X=1) = \dfrac{\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2])}{\mathbb{P}(Y=2)} = \dfrac{\frac{1}{14}}{\frac{14}{3}} = \dfrac{1}{3}$
- $\mathbb{P}_{[Y=2]}(X=0) = \dfrac{\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=2])}{\mathbb{P}(Y=2)} = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{14}{3}} = \dfrac{2}{3}$

Remarque :

On peut jongler entre loi du couple, lois marginales, lois conditionnelles. Il s'agit simplement d'application la formule des probabilités composées, ou la formule des probabilités totales.
Soit (X,Y) un couple de VAR discrètes. Alors :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\quad \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}_{[X=x]}(Y=y)$$
$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\quad \mathbb{P}([X=x]\cap[X=y]) = \mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}_{[Y=y]}(X=x)$$
$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x) = \sum_{k\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}_{[Y=k]}(X=x)$$
$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y=y) = \sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=y)$$

4.4.4 Variables aléatoires indépendantes

Définition 43 **Indépendance de 2 VARD**

Soient deux variables aléatoires discrètes X et Y.
On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

Autrement dit, pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$ les événements $[X=x]$ et $[Y=y]$ sont indépendants.

Remarque :

Si on connaît la loi du couple (X,Y) dans un tableau à double entrée, si au moins un zéro apparaît, on est certain que les variables ne seront pas indépendantes.

Exemples :

E 1 – Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement deux boules avec remise. Soient X et Y les numéros respectivement obtenus. On a :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\quad \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \frac{1}{n^2} = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$$

donc les variables X et Y sont indépendantes.

E 2 – Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement deux boules sans remise. Soient X et Y les numéros respectivement obtenus. On a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\quad \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i]) = 0$$

mais a priori $\mathbb{P}(X=i)$ et $\mathbb{P}(Y=i)$ ne sont pas nulles, donc on a $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i]) \neq \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=i)$. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Remarque :

Si X et Y sont indépendantes, on a aussi

$$\mathbb{P}([X\leqslant x]\cap[Y\leqslant y]) = \mathbb{P}(X\leqslant x)\mathbb{P}(Y\leqslant y)$$

Proposition 44

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Si f et g sont deux fonctions numériques définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exemple :

Si X et Y sont indépendantes, les variables X^2 et $2Y-1$ sont également indépendantes.

Définition 45 — **Indépendance de n VARD**

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires discrètes.
On dit que les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

Remarque :

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n VARD discrètes indépendantes, alors si Y est une fonction des variables $X_1, \dots, X_p$ et Z est une fonction des variables $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$, alors Y et Z sont indépendantes.
Par exemple, si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 VAR discrètes indépendantes, alors les variables $X_1 + 2X_4^2$ et $X_5 - \exp(X_3)$ sont indépendantes.

Définition 46 — **Indépendance d'une infinité de VARD**

On dit que la suite de VAR discrètes $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une **suite de variables aléatoires indépendantes** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables $X_0, X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

4.4.5 Loi de probabilité d'une fonction de deux VARD

Définition 47

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie au moins sur l'ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Alors $Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire telle que

$$Z(\Omega) = \{g(i,j), \quad i \in X(\Omega),\ j \in Y(\Omega)\} = \{z_k, k \in K\}$$

Proposition 48

Soit $Z = g(X, Y)$. Alors, on a

$$\forall z_k \in Z(\Omega), \quad \mathbb{P}(Z = z_k) = \sum_{\substack{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(i,j) = z_k}} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

Théorème 49

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Soit $Z = X + Y$, alors

$$\forall k \in Z(\Omega), \quad \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = k - i])$$

Exemples :

E 1 – On reprend l'exemple 1 dont la loi est donnée par :

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	1/21	3/14	1/7	1/84
1	1/7	2/7	1/14	0
2	1/21	1/28	0	0

Soit $S = X + Y$. Déterminons la loi de S.

- $S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
- $\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = \dfrac{1}{21}$.
- $\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \dfrac{3}{14} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{5}{21}$.
- $\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}([X = 0]\cap[Y = 2])+\mathbb{P}([X = 1]\cap[Y = 1])+\mathbb{P}([X = 2]\cap[Y = 0]) = \dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{21} = \dfrac{10}{21}$.
- $\mathbb{P}(S = 3) = \mathbb{P}([X = 0]\cap[Y = 3])+\mathbb{P}([X = 1]\cap[Y = 2])+\mathbb{P}([X = 2]\cap[Y = 1])+\mathbb{P}([X = 3]\cap[Y = 1])$
  $= \dfrac{1}{84} + \dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{28} = \dfrac{10}{84}$.

E 2 – Soit $Z = XY$. Déterminons la loi de Z.

- $Z(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
- $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$
- $\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{28} = \dfrac{3}{28}$.
- $\mathbb{P}(Z = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z = 1) - \mathbb{P}(Z = 2) = \dfrac{51}{84}$

Proposition 50 ***Stabilité de la loi binomiale***

Soient X et Y deux VAR telles que : $\begin{cases} X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p) \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m,p) \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{cases}$

Alors, la variable $Z = X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_k$ sont k variables indépendantes suivant respectivement des lois binomiales $\mathcal{B}(n_1, p), \mathcal{B}(n_2, p), \ldots, \mathcal{B}(n_k, p)$, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k, p)$.

Démonstration :

Voir TD.

Proposition 51 ***Stabilité de la loi de Poisson***

Soient X et Y deux VAR telles que : $\begin{cases} X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda') \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{cases}$

Alors, la variable $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \lambda')$.

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_k$ sont k variables indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1), \mathcal{P}(\lambda_2), \ldots, \mathcal{P}(\lambda_k)$, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k, p)$.

Démonstration :

Voir TD.

4.4.6 Espérance d'une variable aléatoire $g(X, Y)$

Théorème 52 ***Linéarité de l'espérance***

Soient X et Y deux VAR discrètes admettant une espérance, et soient a et b deux réels. Alors $aX + bY$ admet également une espérance et :

$$\boxed{\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]}$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes admettant toutes une espérance, alors la variable $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet également une espérance et

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]}$$

Théorème 53 ***Théorème de transfert***

Soient X et Y deux VAR discrètes et soit g une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, alors si $Z = g(X, Y)$ admet une espérance, elle vaut :

$$\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y) \mathbb{P}\left([X = x] \cap [Y = y]\right)$$

Théorème 54

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors si XY admet une espérance, on a :

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \mathbb{P}\left([X = x] \cap [Y = y]\right)$$

De plus, si X et Y sont indépendantes, $\boxed{\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$.

Démonstration :

Vérifions le deuxième point, si X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \mathbb{P}\left([X = x] \cap [Y = y]\right) \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \mathbb{P}\left(X = x\right) \mathbb{P}\left(Y = y\right) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\left(\sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbb{P}\left(Y = y\right) \right) x \mathbb{P}\left(X = x\right) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{E}[Y] x \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X]
\end{aligned}$$

Remarque :

Attention, la réciproque est fause.

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Longrightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \not\Longleftarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

4.4.7 Covariance de deux variables aléatoires

Définition 55

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance.
On appelle **covariance de X et de Y** le nombre réel défini par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\Big]$$

s'il existe.

Théorème 56

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la covariance de X et de Y existe et on a :

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$$

Remarques :

R 1 – On a $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$

R 2 – On a $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}[X]$

Théorème 57

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Longrightarrow Cov(X,Y) = 0$$

Remarque :

La réciproque est fausse !
Il est possible qu'on ait $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et que les variables X et Y ne soient pas indépendantes.
Cependant, si $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, on est certain que X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 58

Si X et Y sont deux variables aléatoires telles que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

on dit que **les variables X et Y sont non corrélées**.

Exemple :

Reprenons notre exemple fil-rouge.
On a

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} + \frac{2}{12} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[Y] = \frac{15}{28} + \frac{6}{14} + \frac{3}{84} = 1$$

De plus, on a calculé la loi de $Z = XY$, donc

$$\mathbb{E}[XY] = 1 \times \frac{2}{7} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

Proposition 59

La covariance est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
Autrement dit, pour toutes variables X_1 et X_2, Y_1, Y_2 admettant des moments d'ordre 2 et pour tous réels a, b, on a :

$$Cov(aX_1 + bX_2, Y) = a\ Cov(X_1, Y) + b\ Cov(X_2, Y)$$

$$Cov(X, aY_1 + bY_2) = a\ Cov(X, Y_1) + b\ Cov(X, Y_2)$$

Définition 60

Soient X et Y deux VAR discrètes d'écart-type non nul.
On appelle **coefficient de corrélation linéaire de X et Y** le réel :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Remarque :

Le coefficient de corrélation linéaire est un réel compris entre -1 et 1.
Il compare les similarités entre les lois de X et Y.
Si $\rho = 1$, alors $Y = aX + b$ avec $a > 0$.
Si $\rho = -1$, alors $Y = aX + b$ avec $b < 0$.
Si $\rho \in]-1, 1[$ est proche de -1 et 1, la corrélation entre les variables est forte. On peut dire que les deux variables son alors **fortement corrélées**. Si $\rho = 0$, alors les variables sont **non corrélées**, donc sont linéairement indépendantes (mais pas forcément indépendantes dans le sens probabiliste).

4.4.8 Variance et somme

Théorème 61

Pour toutes variables X et Y admettant un moment d'ordre 2, alors $X + Y$ admet une variance et

$$\boxed{\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\ Cov(X, Y)}$$

De plus, si X et Y sont indépendantes,

$$\boxed{\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]}$$

Remarques :

R 1 – Plus généralement, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des VAR discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2, alors la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet également une variance et

$$\mathbb{V}[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i] + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

R 2 – De plus, si les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on a

$$\mathbb{V}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \cdots + \mathbb{V}[X_n]$$