CHAPITRE 3

Espaces probabilisés (cas général)

3.1 Espace probabilisable général

3.1.1 Notion de tribu

Définition 1

On considère une expérience aléatoire dont l'**univers** est noté Ω.
Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On dit que **$\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω** si :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, autrement dit :

$$\text{Si } A \in \mathcal{A}, \text{ alors } \overline{A} \in \mathcal{A}$$

- $\mathcal{A}$ est stable par union au plus dénombrable, autrement dit :

$$\text{Si } I \subset \mathbb{N}, \text{ et si } (A_i)_{i\in I} \text{ est une famille d'éléments de } \mathcal{A}, \text{ alors } \bigcup_{i\in \mathbb{I}} A_i \in \mathcal{A}$$

Définition 2

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle un **espace probabilisable**.
Les événements de $\mathcal{A}$ sont des **événements** de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exemples :

- **E 1** – L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω. C'est la plus grosse tribu qui puisse exister sur Ω.
  En pratique, dès que Ω est fini, on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (c'était le cas en première année).
- **E 2** – Si $A \subset \Omega$, alors $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu.

Proposition 3

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω. Alors

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. *Si A et B sont deux événements de $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont dans $\mathcal{A}$*
3. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection au plus dénombrable, autrement dit :*

$$\text{Si } I \subset \mathbb{N}, \text{ et si } (A_i)_{i\in I} \text{ est une famille d'éléments de } \mathcal{A}, \text{ alors } \bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i \in \mathcal{A}$$

3.1.2 Espace probabilisé

Remarque :

(Théorème admis). On suppose que $\sum u_n$ est une série absolument convergente. Si σ est une permutation de $\mathcal{N}$, alors $\sum u_{\sigma(n)}$ converge aussi absolument et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Autrement dit, on peut changer l'ordre des termes des séries absolument convergentes, cela ne modifie ni la convergence ni la valeur de la somme.

Définition 4

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité sur** $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ qui vérifie :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) \qquad \text{(propriété de } \sigma\text{-}\textbf{additivité})$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ s'appelle alors un **espace probabilisé**.

Remarque :

L'ensemble I sur lequel on numérote les événements est toujours « au plus dénombrable » pour nous.

Si I est fini, par exemple $I = \{1, 2, \dots, n\}$, alors la notation utilisée signifie : $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.
L'écriture a donc bien un sens et ne pose aucun problème.

Si I est dénombrable, par exemple $I = \mathbb{N}$, l'écriture devient celle-ci : $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$.
L'écriture a-t-elle un sens ? La série $\sum_{i\geqslant 0} \mathbb{P}(A_i)$ converge-t-elle ?

Pour $N \geqslant 0$, on a $\sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{N} \mathbb{P}(A_i)\right) \leqslant 1$.

La suite des sommes partielles est donc croissante (car la série est à termes positifs), et majorée par 1, donc elle converge. La série $\sum P(A_i)$ est donc bien convergente et sa somme $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$ a bien un sens.

De plus, le terme général de la série étant positif, la convergence est également une absolue convergence, donc l'ordre de sommation est indifférent.

Définition 5

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathcal{A}$.

- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est un **événement négligeable**.
- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est un **événement presque-sûr**.

3.1.3 Propriétés

Proposition 6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements. Alors

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. *En particulier,* $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$
3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. *Si* $A \subset B$*, alors* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Remarques :

R 1 – Les propriétés vues en première année pour les espaces probabilités finis restent donc valable pour les espaces probabilités généraux. œitem La formule du Crible est également vraie dans le cas général. On a par exemple pour trois ensembles :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

3.1.4 Le modèle d'équiprobabilité

Définition 7

Soit Ω un ensemble fini On dit que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est en **situation d'équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, l'équiprobabilité se traduit par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{n}$$

Théorème 8 ***Formule dans le cas d'équiprobabilité***

Si un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est en situation d'équiprobabilité, alors pour tout événement A, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\textit{Nombre de cas favorables à } A}{\textit{Nombre de cas total}}}$$

Remarque :

ATTENTION ! La situation d'équiprobabilité est un cas très très particulier, qui ne fonctionne que dans un cadre fini. Dans la plupart des cas, on est au contraire en non-équiprobabilité.

3.1.5 Systèmes complets d'événements

Définition 9

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $I \subset \mathbb{N}$. On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est un **système complet d'événements de Ω** si :

(i) Les événements A_i sont deux à deux incompatibles.

$$\forall i, j \in I, \text{ si } i \neq j, \text{ alors } A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii) $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$

Exemple :

On lance un dé équilibré. On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

— La famille d'événements $(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\})$ est le système complet d'événements composé des événements élémentaires.

— On note A l'événement "obtenir un nombre pair" et B l'événement "obtenir un nombre impair". Alors (A, B) forme un système complet d'événements.

Proposition 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements. Alors

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

Définition 11

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisé et $I \subset \mathbb{N}$. On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est un **système quasi-complet d'événements de Ω** si :

(i) Les événements A_i sont deux à deux incompatibles.

$$\forall i, j \in I, \text{ si } i \neq j, \text{ alors } A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii)

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

Remarque :

Dans un espace probabilité général, certains événements sont possibles, mais négligeables (de probabilité nulle). La définition de système quasi-complet d'événements permet de ne pas prendre en compte ces événements.

3.1.6 Théorème de la limite monotone

Définition 12

Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit que (A_n) est une **suite croissante d'événements** de $\mathcal{A}$ lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$$

On dit que (A_n) est une **suite décroissante d'événements** de $\mathcal{A}$ lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$$

Théorème 13 ***Théorème de la limite monotone***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. *Si (A_n) est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. *Si (A_n) est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exemple :

On considère une infinité de lancers de dés et on veut déterminer la probabilité de ne jamais obtenir de 1.
Pour cela, on introduit l'événement : B : "ne jamais obtenir de 1",
ainsi que les événements : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n$: "ne pas obtenir de 1 au cous des n premiers lancers".
Alors, on a

$$B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$$

De plus, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

et ne pas obtenir de 1 au cours des $n+1$ premiers lancers, implique en particulier que l'on n'a pas obtenu de 1 au cours des n premiers lancers : donc $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite d'événements (A_n) est donc décroissante pour l'inclusion.
D'après le Théorème de Limite Monotone, $\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. D'où

$$\mathbb{P}\left(\text{"ne jamais obtenir la face 1"}\right) = 0$$

Remarque :

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (A_n) est une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors on a toujours :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} A_k\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} A_k\right)$$

3.2 Conditionnement et indépendance

3.2.1 Probabilité conditionnelle

Remarque :

Toutes les définitions et propriétés énoncés dans le cadre des espaces probabilités finis restent valables pour les espaces probabilités généraux.

3.2.2 Définition

Théorème - Définition 14

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout évenement B, on définit la **probabilité de B sachant A** par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarques :

- **R 1** – L'application $\mathbb{P}_A$ est également une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
- **R 2** – Pour tous événements A et B de probabilité non nulle, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}$$

Proposition 15 ***Formule des Probabilités Composées***

Soient $A_1, \dots, A_n$ une famille d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Théorème 16 ***Formule des probabilités totales***

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)}$$

Remarque :

Si certains A_i ont une probabilité nulle, on peut les enlever de la somme. On utilise alors un **système quasi-complet d'événements**. Autrement dit, si $(A_j)_{ij \in J}$ sont des événements deux à deux incompatibles, de probabilités non nulle, tels que $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$, alors pour tout événement B, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(A_j \cap B) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}(B)}$$

Théorème 17 ***Formule de Bayes***

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements (ou quasi-complet d'événements) et soit B un événement de probabilité non nulle. Alors pour tout $i_0 \in I$, on a :

$$\mathbb{P}_B(A_{i_0}) = \frac{\mathbb{P}(A_{i_0})\mathbb{P}_{A_{i_0}}(B)}{\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

3.2.3 Indépendance d'événements

Définition 18

On dit que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Définition 19

Soient $A_1, \dots, A_n$, n événements.

- On dit que les événements sont **deux à deux indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si

$$\forall i \neq j,\ A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants}$$

- On dit que les événements sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Définition 20

Soit (A_n) une suite infinie d'événements. On dit que les A_n sont **indépendants** si pour tout partie finie I de $\mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$