CHAPITRE 2

Convergence des séries

2.1 Généralités sur les séries

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la **somme partielle d'indice n** associée à la suite (u_n) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$$

- lorsque la suite (S_n) converge, on dit alors que **la série $\sum u_n$ converge** et alors on définit de plus :
  - ⋆ la **somme de la série** :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n}$$

  - ⋆ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le **reste d'ordre n** associé à la série :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$$

  de manière à ce que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$.

- lorsque la suite (S_n) diverge, on dit alors que **la série $\sum u_n$ diverge**.

Remarque :

Si la série est convergente, on a par définition : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n = 0}$ puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarques :

R 1 – On utilise souvent cette propriété dans le sens inverse :

$$\text{SI } (u_n) \text{ ne converge pas vers } 0, \quad \text{ALORS la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ diverge}$$

R 2 – La réciproque de cette propriété est FAUSSE.
Si la suite (u_n) converge vers 0, on ne peut pas affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exemple : la **série harmonique** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

Proposition 2

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ deux séries.

1. *Pour tout réel λ non nul, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ sont de même nature. De plus, si les séries convergent, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

2. *Si les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ est convergente également et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarque :

TRES IMPORTANT :

- L'égalité : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$ est souvent évidente.
- L'égalité : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ n'est pas du tout évidente.
  Le premier membre peut avoir un sens sans que le second en ait un.
  On peut par exemple avoir la série $\sum (u_n + v_n)$ convergente alros que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.
  On prendra garde à ne JAMAIS SEPARER UNE SOMME INFINIE sans avoir vérifié les convergences.

2.2 Séries usuelles

Théorème 3 ***Séries exponentielles***

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

Théorème 4 ***Séries géométriques et dérivées***

*Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ s'appelle la **série géométrique de raison** q. Alors*

$$\sum_{n\geqslant 0} q^n \text{ converge} \iff |q|<1 \qquad \text{et } \forall q \in]-1,1[,\ \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1} \text{ converge} \iff |q|<1 \qquad \text{et } \forall q \in]-1,1[,\ \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}}$$

$$\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2} \text{ converge} \iff |q|<1 \qquad \text{et } \forall q \in]-1,1[,\ \boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}}$$

Théorème 5 ***Séries de Riemann***

*Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée la **série de Riemann d'ordre** α. Alors*

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$$

*En particulier, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, appelée la **série harmonique**, diverge.*

En particulier, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Proposition 6 ***Séries télescopiques***

Soit (u_n) une suite réelle, alors : $\boxed{\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n) \text{ converge} \iff (u_n) \text{ converge}}$.

De plus, en cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \lim_{n\to+\infty}(u_n - u_0)$.

Remarque :

> Lorsqu'on reconnaît une série télescopique, la règle est toujours d'étudier les sommes partielles qui sont télescopiques

2.3 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Théorème 7 ***Critères de comparaison***

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, on ait $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :

- *Si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.*
- *Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.*

Théorème 8 ***Critère de négligeabilité***

Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives telles qu'on ait $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Alors :

- *Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.*
- *Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.*

Théorème 9 ***Critère d'équivalence***

Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives, telles qu'on ait $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Remarque :

Ces critères peuvent être adaptés dans le cas où les deux suites sont négatives.

2.4 Convergence absolue

Définition 10 **Convergence absolue**

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série. On dit que la série **converge absolument** lorsque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 11

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes quelconques.
Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est aussi convergente.

Exemple :

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge car elle est absolument convergente

Remarque :

Si une série est à termes de signes non constants, mais n'est pas absolument convergente (par exemple la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$, toute autre série du type alternée ...), la méthode est la suivante :

- On étudie les sommes partielles $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$
- On étudie plus précisément les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
- Si ces suites extraites sont adjacentes, la suite (S_n) converge et donc la série converge.