CHAPITRE 1

Suites de réels : rappels et compléments

1.1 Rappels de première année

1.1.1 Différents types de suites

Définition 1

Une suite de réels est la donnée d'une application u de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$: $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$.

On note l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque :

Il existe trois différents types de suites :

- **Les suites explicites**
  Ce sont les suites pour lesquelles on connaît de manière explicite chaque u_n :
  Ex : la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.
  C'est bien entendu les suites qui sont les plus faciles à étudier, puisqu'on a une formule qui permet de calculer chaque terme.
- **Les suites implicites**
  Ce sont les suites pour lesquelles on sait que chaque u_n existe, mais on ne connaît pas sa forme explicite.
  Ex : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique réel solution de l'équation $3x + e^{2x} = 0$.
  Déjà, il est plus difficile de savoir si la suite (u_n) est **bien définie**, i.e. si chaque u_n existe bien de manière unique (on utilise souvent le théorème de la bijection). De plus, puisqu'on ne connaît pas explicitement chaque terme de la suite, cela va être plus difficile pour avoir la monotonie, la convergence, ...
- **Les suites récurrentes**
  Ce sont celles où chaque terme de la suite est défini à partir du (ou des) précédent(s).
  Ex : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2+u_n}$
  Là encore, il n'est pas du tout évident que la suite (u_n) est **bien définie**, i.e. si chaque u_n existe bien. Pour cela, on doit en général le montrer par récurrence, en s'assurant que "$\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe".
  Dans l'exemple précédent, il faut s'assurer par exemple que : "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq -2$". Cela dépend en partie de la valeur de u_0.

1.1.2 Etude du comportement d'une suite (rappels)

Remarque :

> Même si ce n'est pas écrit explicitement dans un énoncé, lorsqu'on a une suite à étudier, la première question à se poser et à rédiger est la suivante :
> **La suite (u_n) est-elle bien définie ?**
>
> – Lorsqu'on a une suite explicite, c'est assez immédiat (et si c'est vraiment évident, on peut juste **mentionner** l'existence), on regarde si l'expression de u_n a bien un sens pour tout entier n.
> – Lorsqu'on a une suite implicite, il s'agit de regarder si la manière dont on construit u_n donne bien un et un seul réel appelé "u_n".
> – Lorsqu'on a une suite récurrente, la question zéro est quasi obligatoire. On montre par récurrence que chaque u_n a bien un sens.

Définition 2 — **Suites monotones, suites bornées**

Soit (u_n) une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est :

- **croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$
- **décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$
- **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
- **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$
- **bornée** si : $\exists k \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant k$

Définition 3 — **Convergence d'une suite**

Soit (u_n) une suite de réels et soit ℓ un réel.

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A.$
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \iff \forall B < 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B.$

Remarque :

> Dire qu'une suite **converge** signifie qu'elle admet une limite réelle finie. Dans tous les autres cas (limite infinie ou pas de limite du tout), on dit que la suite **diverge**.

Théorème 4 — ***Théorème de la limite monotone***

Toute suite monotone admet toujours une limite, finie ou infinie.
Une suite croissante et majorée est convergente. Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
Une suite décroissante et minorée est convergente. Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Définition 5 — **Suites adjacentes**

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre est croissante, et si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 6 — ***Théorème des suites adjacentes***

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont la même limite.

Théorème 7 — ***Suites extraites d'indices pairs/impairs***

*Si les **deux suites extraites** (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite (par exemple en étant adjacentes), alors la suite (u_n) converge.*

1.1.3 Suites usuelles

Définition 8

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

Lorsque $a = 1$, on dit qu'on a une suite **arithmétique**.
Lorsque $b = 0$, on dit qu'on a une suite **géométrique**.

Proposition 9 ***Suites arithmétiques***

Soit r un réel et soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, i.e. : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

et la somme de termes consécutifs de (u_n) vaut : $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \dfrac{(u_p + u_n) \times (n - p + 1)}{2}$.

Exemple :

Un cas particulier est : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 10 ***Suites géométriques***

Soit q un réel et soit (u_n) une suite géométrique de raison q, i.e. : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$$

et la somme de termes consécutifs de (u_n) vaut : $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \begin{cases} u_p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n - p + 1)u_p & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Exemple :

Un cas particulier est : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Remarque :

Méthode générale pour les suites arithmético-géométriques.
Soient a et b deux réels, avec $a \neq 1$. Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

1. On cherche un réel x tel que $\boxed{x = ax + b}$ (il suffit de prendre $x = \dfrac{b}{1-a}$, qui existe puisque $a \neq 1$).
2. On pose (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - x$.
3. La suite (v_n) est alors géométrique, de raison a.
4. On peut obtenir alors une forme explicite pour v_n, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$
5. On en déduit alors une forme explicite de $u_n = v_n + x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1.2 Compléments

1.2.1 Théorème de Césaro

Théorème 11 ***Théorème de Césaro***

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels quelconques et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, alors la suite (v_n) converge également vers ℓ.

Remarque :

Ce théorème n'est pas écrit explicitement au programme mais est utilisé dans plusieurs sujets d'oral. Sa démonstration est classique, donc à connaître, elle permet de savoir utiliser la définition de la convergence des suites avec les epsilons.

Démonstration :

Hypothèse : on suppose que (u_n) converge vers ℓ, donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^* \ /\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Pour n assez grand ($n \geqslant N$), on a :

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} - \ell\right| \\
&= \left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n - n\ell}{n}\right| \\
&= \frac{|(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)|}{n} \\
&\leqslant \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell| + |u_N - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n} \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&= \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n} + \frac{|u_N - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n} \\
&\leqslant \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n} + \frac{\varepsilon + \cdots + \varepsilon}{n} \\
&= \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n} + \frac{n - N + 1}{n}\varepsilon
\end{aligned}$$

Or, la première somme tend également vers 0 lorsque $n \to +\infty$, donc :

$$\exists N' \in \mathbb{N}^* \ /\ \forall n \geqslant N',\ \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N-1} - \ell|}{n} \leqslant \varepsilon$$

Donc pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a :

$$|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon + \frac{n - N + 1}{n}\varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi, pour toute valeur de $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel on a : $|v_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$.
Cela signifie exactement que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1.2.2 Suites récurrentes linéaires doubles

Définition 12

On dit qu'une suite (u_n) est **récurrente linéaire double** s'il existe deux réels α, β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

Théorème 13

A la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

*on associe l'**équation caractéristique** :*

$$(*)\ :\ \boxed{x^2 = \alpha x + \beta}$$

On note Δ le discriminant de cette équation.

- *Si $\Delta > 0$, alors l'équation $(*)$ admet deux solutions réelles x_1 et x_2. Alors :*

$$\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda (x_1)^n + \mu (x_2)^n}$$

- *Si $\Delta = 0$, alors l'équation $(*)$ admet une racine double x_0. Alors :*

$$\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda (x_0)^n + \mu n (x_0)^n}$$

- *Si $\Delta < 0$, alors l'équation $(*)$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$. Alors*

$$\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)}$$

Dans tous les cas, les constantes λ et μ sont déterminées à partir des valeurs de u_0 et u_1.

Exemples :

E 1 – Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

L'équation caractéristique associée est $x^2 = 5x - 6 \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0$.
On a donc : $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.
Reste à trouver les valeurs de λ et μ.
On sait que $u_0 = \lambda 2^0 + \mu 3^0$ donc $1 = \lambda + \mu$. On sait que $u_1 = \lambda 2^1 + \mu 3^1$ donc $0 = 2\lambda + 3\mu$.
Ainsi $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2 + \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3 \\ 2\mu = -2 \end{cases}$.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$.

E 2 – Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

L'équation caractéristique associée est $x^2 = -2x - 4 \iff x^2 + 2x + 4 = 0$.
L'équation admet pour solutions les complexes $2j$ et $2j^2$: $2e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$.
On a donc : $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \left(\lambda \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
Reste à trouver les valeurs de λ et μ.
On sait que $u_0 = \lambda \cos(0) + \mu \sin(0)$ donc $1 = \lambda$. On sait que $u_1 = 2\left(\cos(2\pi/3) + \mu \sin(2\pi/3)\right)$ donc $0 = -\frac{1}{2} + \mu\sqrt{3}2$, donc $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \left(\cos\left(n\dfrac{2\pi}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(n\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

1.2.3 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

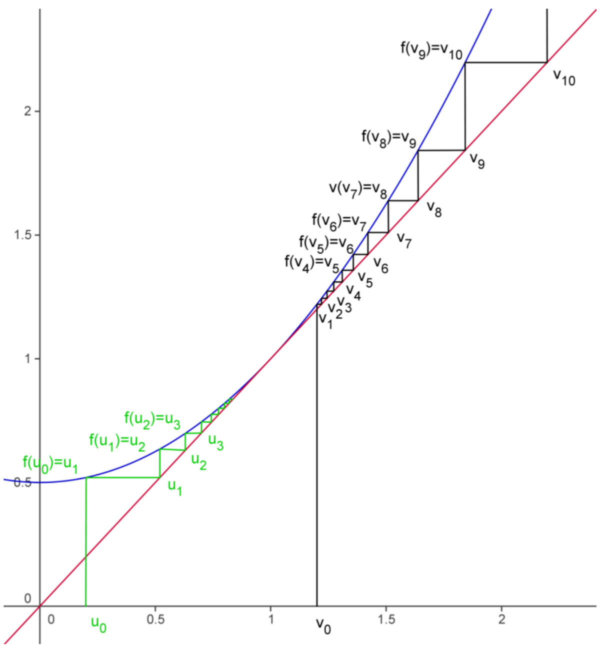
On s'intéresse ici à une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Exemple :

Une suite arithmético-géométrique est de la forme $u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$

Remarque :

On peut souvent tracer la courbe de la fonction f et représenter la suite (u_n) sur ce graphique. Cela nous donne des informations (des conjectures) concernant la monotonie de la suite, les limites possibles, et son comportement en général.



Ci-contre, les suites définies par :

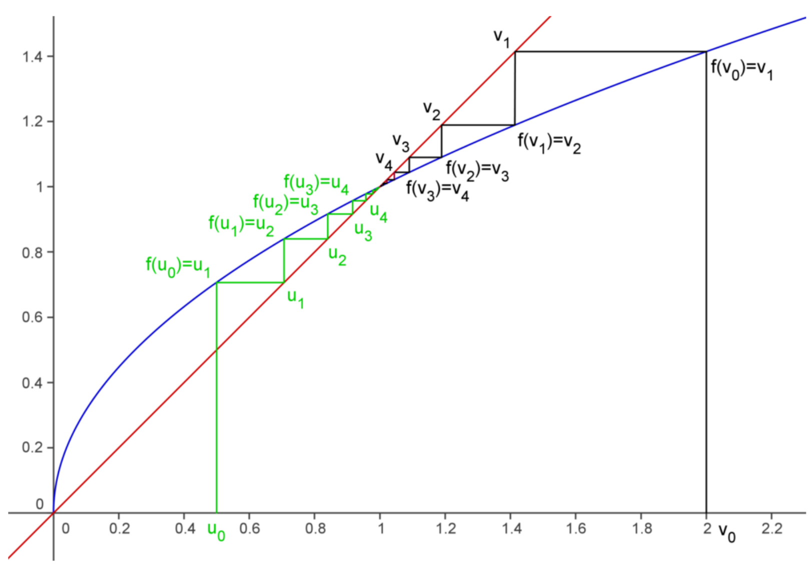
$$\begin{cases} u_0 = 0.2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2} \end{cases}$$

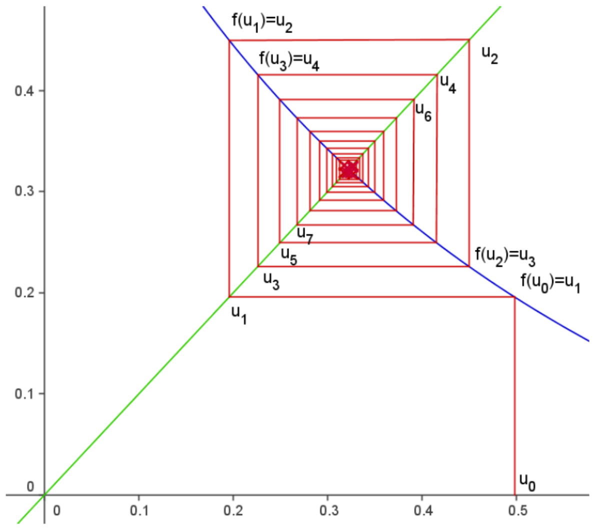
et

$$\begin{cases} v_0 = 1.2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2 + 1}{2} \end{cases}$$

Ci-contre, les suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$ et

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{v_n} \end{cases}$$





Ci-contre, la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{(u_n+1)^2} - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Définition 15

On dit qu'une suite récurrente (u_n) définie par une relation : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est **bien définie** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n \in I$ (pour qu'on puisse bien calculer $f(u_n)$).

Remarque :

Le plus souvent, on peut le montrer par récurrence. Il suffit de trouver un bon intervalle I tel que $f(I) \subset I$. On dit que I est un **intervalle stable par f**.

Théorème 16 ***Théorème du point fixe***

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
Si (u_n) converge vers un réel $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ, alors on a nécessairement $f(\ell) = \ell$. Le réel ℓ est appelé un ***point fixe de f****.*

Remarque :

On sait donc que si la suite (u_n) converge, alors nécessairement elle converge vers un point fixe

Théorème 17 ***Méthode générale d'étude d'une suite récurrente***

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- *Si la fonction f est croissante sur l'intervalle I, alors la suite (u_n) sera monotone.*
- *Si la fonction f est décroissante sur l'intervalle I, alors on étudie les suites extraites d'indices pairs (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui, elles, seront monotones.*

Remarque :

Dans certains cas, on peut utiliser l'**Inégalité des Accroissements Finis** pour conclure sur la convergence d'une suite récurrente. Par exemple, si on montre à l'aide de l'Inégalité des Accroissements Finis que
$\exists k \in [0,1[\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$
où ℓ désigne un point fixe de f, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$, d'où par encadrement que (u_n) converge vers ℓ.

1.2.4 Sommes de Riemann

Proposition 18 ***Lien entre intégrale et aire***

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$.
Alors l'aire (en unités d'aires) comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b f(t)dt$$

Définition 19

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point).
On partage cet intervalle $[a,b]$ en n segments de longueur identique, à savoir de longueur $\dfrac{b-a}{n}$.
On génère ainsi une **subdivision** $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ avec :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Remarque :

On a $x_0 = a$ et $x_n = b$

Théorème 20 ***Sommes de Riemann***

Si f est <u>continue</u> sur le segment $[a,b]$, alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_a^b f(t)dt} \quad et \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_a^b f(t)dt}$$

Remarques :

R 1 – Pour appliquer la formule des sommes de Riemann, il faut déterminer le nombre de rectangles (le nombre de termes dans la somme), les valeurs de a et b et l'expression de la fonction f (continue sur $[a,b]$).

R 2 – Cas particuliers importants : si $[a,b] = [0,1]$, alors si f est une fonction continue sur $[0,1]$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt}$$

Exemple :

Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

On a directement que $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$. On reconnaît donc une Somme de Riemann associée à la fonction f sur $[0,1]$ pour la subdivision régulière de $[0,1]$ en n segments. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, on en déduit que

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$$