

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et $(I - A)^2$.
 2. Déterminer le spectre de A .
 3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
 4. La somme $\text{Im}(A) + \text{Ker}(A)$ est-elle directe ?
 5. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MA = M$.
-

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner leur fonction de répartition commune F .
2. Donner les fonctions de répartitions de $U = \min(X, Y)$ et de $V = \max(X, Y)$.
3. Calculer la probabilité que $\max(X, Y)$ dépasse $3/4$ sachant que $\min(X, Y)$ dépasse $1/3$.
4. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?