Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit a un nombre réel strictement positif. On définit pour tout entier n strictement positif :

$$P_n = \prod_{t=0}^{n} \frac{a+t}{2a+t}$$

1. Montrer que pour tout réel $u \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{u}{1+u} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$$

2. Déterminer, en fonction de a, la nature de la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$. Donner un équivalent de $\ln(P_n)$ quand n tend vers l'infini.
3. Discuter, en fonction de a, la nature de la série de terme général P_n.
4. Calculer la valeur de la somme quand $a = 2$.
5. Dans une urne, on dispose initialement une boule rouge et une boule noire (indiscernables au toucher). On tire ensuite une boule (uniformément) : si elle est noire, on arrête ; si elle est rouge, on la remplace dans l'urne par deux boules rouges, et on recommence jusqu'à ce que l'on tombe sur la boule noire. Que peut-on dire du nombre moyen de tirages effectués ? Et si on était parti avec une urne contenant deux boules rouges et deux boules noires ?

Exercice 2

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$A(\lambda) = A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ \lambda_1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice "anti-diagonale" associée λ.

1. On considère, dans cette question seulement, le cas $n = 2$. La matrice $A(1,1)$ est-elle inversible ? Déterminer ses valeurs propres, et la diagonaliser si c'est possible.
2. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$, calculer le produit $A(\lambda)A(\mu)$. En déduire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tels que $A(\lambda)$ est inversible.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, déterminer l'ensemble des valeurs propres de $A(\lambda)$, et la diagonaliser lorsque c'est possible.