Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

1. Soit N un entier de $\mathbb{N}^*$. On lance N fois une pièce équilibrée. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ l'espace probabilisé associé à cette expérience.
   On désigne par X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de "Face" (respectivement de "Pile") obtenus.
   Calculer la covariance de X et Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Dans la suite de l'exercice, le nombre N de parties est une variable aléatoire définie sur Ω).
   On modélise l'expérience par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   (a) On suppose que N suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
      i. Déterminer les lois de X et de Y. Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X.
      ii. En déduire la valeur de $\mathrm{cov}(X, Y)$.
      iii. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \neq 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$$

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et le signe de $f(x) - x$. Donner l'allure de la courbe représentative de f.
   Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
2. On suppose dans cette question que $u_0 > 1$.
   Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 2(1 + \sqrt{2})$.
   Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
3. Etudier de même le cas où $u_0 < 1$.
   Montrer que la suite (u_n) est monotone. Etudier la nature de cette suite.