Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Pour tout entier strictement positif n et pour tout nombre réel x strictement positif, on note

$$v_n(x) = \frac{1-\exp(-nx)}{n(n+1)}$$

1. Montrer que la série de terme général $v_n(x)$ converge. Dans la suite de l'exercice, on note

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

2. En admettant que pour tout réel $y \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$$

montrer que

$$f(x) = (1-\exp(x))\ln(1-\exp(-x))$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, et calculer ses limites en 0 et en $+\infty$. Tracer son graphe.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

1. Ecrire la densité de X.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $|g'(X)|$ et $|Xg(X)|$ admettent une espérance. Montrer que

$$\mathbb{E}\big[g'(X)\big] = \mathbb{E}\big[Xg(X)\big]$$

3. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout entier naturel n.
4. On pose, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$u_n = \ln\left(\mathbb{E}[X^{2n}]\right)$$

Ecrire u_{n+1} en fonction de u_n.
En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.