Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Pour $n \geqslant 2$ et des réels $a_1, \dots, a_n$, on considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Discuter le rang de M en fonction des a_k.
2. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de M si et seulement si

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \cdots - a_n = 0$$

   Exhiber également une base du sous-espace propre associé et préciser sa dimension.
3. En déduire que :
   (a) la matrice M est diagonalisable si et seulement si P admet n racines distinctes.
   (b) si $a_n \geqslant 0$, alors M admet au moins une valeur propre positive.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi normale centrée réduite.
On note φ sa densité et Φ sa fonction de répartition.
Soit $c \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = c\varphi(x)\Phi(x)$$

1. Trouver une relation entre $\Phi(x)$ et $\Phi(-x)$.
2. Déterminer c pour que g soit une densité de probabilité.
3. Soit Y une variable aléatoire réelle de densité g. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{V}[Y]$