*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.*

*Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.*

---

## Exercice 1

On considère deux urnes, celle de gauche contient au début du jeu (tour $t = 0$) deux boules blanches et celle de droite, deux boules noires. On répète le protocole suivant : à chaque tour $t = 1, 2, \dots$, on part de la configuration du tour $t - 1$, on choisit au hasard une boule dans chaque urne et on les échange. On note $X_t$ le nombre de boules blanches dans l'urne de gauche.

1. Déterminer $X_0$ et $X_1$. Quelles sont les valeurs possibles pour $X_t$ lorsque $t \geqslant 2$ ?
2. Déterminer, pour $i = 0, 1, 2$, et $k \geqslant 0$ tels que $\mathbb{P}(X_k = i) > 0$, la valeur de $\mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i)$ pour $j = 0, 1, 2$.
3. Pour $k \geqslant 0$, on note $z_k$ le vecteur
$$z_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 0) \\ \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \end{pmatrix}$$
Exhiber une matrice $M$ telle que $z_{k+1} = M z_k$ pour tout $k \geqslant 0$.
4. Calculer les valeurs propres de $M$.
5. En déduire que toutes les composantes de $z_k$ convergent lorsque $k \to +\infty$. Déterminer le vecteur limite ainsi obtenu en prouvant au préalable que ses composantes sont de somme 1.

---

## Exercice 2

Pour tout entier $n$ strictement positif, on définit : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$.

1. Justifier que $u_n$ est une somme de Riemann.
2. Montrer que $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$ à identifier.
3. Montrer qu'il existe une fonction $F$ telle que : $\ell - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[ F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) \right]$.
4. Montrer que pour toute fonction $g$ deux-fois dérivable sur un intervalle réel $[0, x]$, il existe $c \in [0, x]$ tel que
$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(c)}{2} x^2$$
On pourra pour cela utiliser la fonction auxiliaire $h$ définie sur $[0, x]$ par la relation
$$h(y) = g(x) - g(y) - g'(y)(x - y) - d(x - y)^2$$
où $d$ est un réel choisi tel que $h(0) = 0$.
5. En déduire un équivalent de $\ell - u_n$ quand $n$ tend vers l'infini.