Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On observe des virus qui se reproduisent selon une loi géométrique avant de mourir : un virus donne naissance en une journée à X virus, où X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $0 < p < 1$, puis meurt :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$$

1. Calculer pour tout $r \in [0, 1]$, la valeur $f(r) = \mathbb{E}\left[r^X\right]$.
2. On part au jour zéro de $X_0 = 1$ virus. Au premier jour, on a donc X_1 virus, où X_1 suit la loi géométrique de paramètre p ; chacun de ces X_1 virus évolue alors indépendamment des autres virus et se reproduit selon cette même loi géométrique avant de mourir : cela conduit à avoir X_2 virus au deuxième jour ; et le processus continue de la sorte. On note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
   (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   (b) Montrer que (u_n) est convergente.
   (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (d) Déterminer alors la limite de (u_n) en fonction de p. Interpréter ce résultat.

Exercice 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation

$$e^x + x - n = 0$$

1. Montrer que pour tout n, l'équation admet une unique solution, que l'on notera u_n.
2. Déterminer la limite de (u_n)
3. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$
4. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.