*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.*

*Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.*

---

## Exercice 1

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. Soient les variables aléatoires définies par :

- $X_1$ est le temps écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne.
- $X_2$ est le temps écoulé entre la remise en route de la machine après la première panne et la panne suivante.
- $X_3$ est le temps écoulé entre la remise en route de la machine après la deuxième panne et la panne suivante.

On suppose que $X_1, X_2, X_3$ sont indépendantes, de loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Le temps est exprimé en heures.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?
2. Calculer la probabilité que chacune des trois périodes de fonctionnement dure plus de deux heures.
3. Soit $Y$ la variable aléatoire égale à la plus grande des trois durées de fonctionnement.
   (a) Déterminer une densité de $Y$.
   (b) Pour $a < 0$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{at}dt$. En déduire $\mathbb{E}[Y]$.

---

## Exercice 2

Soit $(u_n)$ une suite à termes positifs telle qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} a - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Le but est d'étudier la convergence de la série de terme général $u_n$.

1. Enoncer une première série de résultats dépendant de $a$.
2. On suppose dès maintenant que $a = 1$.
   (a) On suppose $b > 1$. Soit $\beta \in ]1, b[$. En comparant $u_n$ et $\dfrac{1}{n^\beta}$, montrer que $\sum u_n$ converge.
   (b) On suppose $b < 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
   (c) Que peut-on dire quand $b = 1$ ?