Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

1. Soit λ un réel fixé. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\lambda-t)^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = 1$$
2. En déduire que si X est une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée réduire $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = e^{\lambda^2/2}$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. On pose
$$U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad V = \frac{Y-X}{\sqrt{2}}$$
Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda U}) = \mathbb{E}(e^{\lambda V}) = e^{\lambda^2/2}$.
4. Soit μ un autre réel. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda U + \mu V}) = \mathbb{E}(e^{\lambda U})\mathbb{E}(e^{\mu V})$.

Exercice 2

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. On appelle matrice de Vandermonde des $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice de Vandermonde des $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est inversible si et seulement si les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux à deux distincts.

Soit $P = X^n + c_1X^{n-1} + c_2X^{n-2} + \cdots + c_{n-1}X + c_n$ un polynôme à coefficients réels admettant des racines toutes réelles et toutes distinctes. Soit
$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_1 \end{pmatrix}$$
et soit D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les racines de P.

2. Montrer qu'il existe une matrice H de Vandermonde telle que $HC_P = DH$.
3. Quelles sont les valeurs propres de C_P ?