Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit a un réel non nul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A+I)(A-2I)$, où I représente la matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A. La matrice A est-elle inversible ?
3. Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale, une matrice P inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable, de dérivée f' continue, vérifiant en outre que

$$f(0) = 0, \quad \text{et} \quad \forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$$

Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$g(x) = \left(\int_0^x f(t)dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t)dt$$

1. Montrer que g est dérivable et écrire sa dérivée sous la forme

   $$g'(x) = f(x)h(x)$$

   pour une fonction h à préciser.
2. Montrer que g est croissante.
3. On veut déterminer les applications f telles que g est la fonction nulle : $g(x) = 0$ pour tout $x \geqslant 0$.
   (a) Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \geqslant 0$ et $f(x) = x$ pour tout $x \geqslant 0$ conviennent toutes deux.
   (b) On fixe dans cette question et la suivante une fonction f telle que $g = 0$.
   Montrer qu'en un point $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) > 0$, il existe un intervalle $I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ tel que $f'(x) = 1$ pour tout $x \in I$.
   (c) Tracer l'allure de f et conclure que seules les applications considérées à la question a conviennent.