Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
2. (a) Démontrer que les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}((f - 3Id)^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

   (b) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer T^n pour n entier naturel non nul. En déduire A^n.
4. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner l'expression de $(A^{-1})^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n dx$$

et on étudie ici la suite (I_n).

1. Justifier l'existence des intégrales définissant les I_n.
2. Montrer que (I_n) est décroissante et qu'elle converge vers une limite à préciser.
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n, pour tout $n \geqslant 1$.
4. Conclure que $I_n = o\left((\ln 2)^n\right)$ et donner un équivalent de I_n.