

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

---

## Exercice 1

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  qui lui est canoniquement associé.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f$ . Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
- (a) Démontrer que les deux sous-espaces vectoriels  $\text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $\text{Ker}((f - 3\text{Id})^2)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .  
(b) En déduire qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer  $T^n$  pour  $n$  entier naturel non nul. En déduire  $A^n$ .
  - La matrice  $A$  est-elle inversible ? Si oui, donner l'expression de  $(A^{-1})^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 

## Exercice 2

Une tortue donne naissance à un nombre  $N$  de bébés : on note  $M$  le nombre de mâles et  $F$  le nombre de femelles. On suppose que  $N$  est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  désignant un nombre réel strictement positif), et on suppose que chaque bébé a (indépendamment des autres) une chance sur deux d'être une femelle.

- Calculer la loi du couple  $(N, F)$
- Calculer la loi de  $F$ , puis celle de  $M$
- Les variables  $M$  et  $F$  sont-elles indépendantes ?