Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit a un réel non nul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A+I)(A-2I)$, où I représente la matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A. La matrice A est-elle inversible ?
3. Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale, une matrice P inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de la variable $X = X_1 + X_2$. Donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de la variable $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Donner son espérance et sa variance.
3. Calculer l'espérance de la variable $Y^2 + Y$. En déduire pour tout $x \in]0,1[$ la somme de la série :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)x^k$$

4. On admet que pour tout $x \in [0,1[$, on a $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.
   (a) On note Z la variable aléatoire donnée par $Z = \frac{X_1}{X_2}$. Calculer l'espérance de Z et prouver que $\mathbb{E}[Z] > 1$.
   (b) Quelles sont les valeurs prises par Z ? Déterminer la loi de Z.