Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{ si } x>0 \text{ et } f(0)=0$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ lorsque c'est possible.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Pour tout $y>0$, on pose $g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}$. Effectuer un développement limité à l'ordre 1 de g lorsque y tend vers 0^+.
4. Tracer succintement le graphe de f en tenant compte des réponses aux questions précédentes.

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ est une densité de probabilité.
   On note Y une variable aléatoire admettant g pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition G de Y.
3. Soit a un réel appartenant à $\left[\frac{1}{2},1\right]$, et soit f_a la fonction définie par :

$$f_a(x) = \begin{cases} 2(1-a)g(x) & \text{si } x<0 \\ 2ag(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que f_a est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit X_a une variable aléatoire de densité f_a. Déterminer la fonction de répartition F_a de X_a.