Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux-fois dérivable, de dérivée seconde notée f'' telle que $f'' \geqslant 0$.
On veut montrer que pour tous réels x et y, et pour tout $p \in [0, 1]$, on a :

$$f(px + (1-p)y) \leqslant pf(x) + (1-p)f(y)$$

Il suffit évidemment de prouver ce résultat pour $x < y$ et $0 < p < 1$, deux hypothèses que l'on fait dans la suite.
On note $z = px + (1-p)y$.

1. Construire explicitement un polynôme P_z de degré 2 tel que :
$$P_z(x) = 0, \quad P_z(y) = 0 \text{ et } P_z(z) = 1$$
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que
$$Q(x) = f(x), \quad Q(y) = f(y) \text{ et } Q(z) = f(z)$$
3. Montrer que la fonction $f - Q$ est deux-fois déirvable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde s'annule au moins une fois.
Conclure alors à l'inégalité recherchée.
4. *Application :* soit X une variable aléatoire réelle admettant un nombre fini de valeurs, montrer que
$$f(\mathbb{E}[X]) \leqslant \mathbb{E}(f(X))$$

Exercice 2

Soit a un réel fixé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x \leqslant a \end{cases}$$

1. Vérifier que f définit une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire réelle de densité f.
2. On désigne par F la fonction de répartition de X. Déterminer un réel m tel que $F(m) = \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que $Y = X - a$ est une variable aléatoire à densité dont on déterminera une densité.
4. Montrer que $Z = Y^2$ est une variable aléatoire à densité dont on déterminera une densité.
5. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
On pose $Y = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de probabilité de Y.