Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer les limites de F en 0^+ et $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0,1]$,
$$\left| \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln(x) \right| \leqslant C$$
En déduire que $F(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln(x)$
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leqslant \frac{1}{x} F(x)$.
En déduire que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x par
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire ayant f pour densité.
2. Soit φ la fonction définie pour tout réel x par $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer.
3. Soient X de densité f et $Y = \varphi(X)$. Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.