Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ lorsque c'est possible.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Pour $y > 0$, on pose $g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}$. Effectuer un développement limité à l'ordre 1 de g lorsque y tend vers 0^+.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 2

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, c'est-à-dire admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour $\lambda > 0$, calculer la fonction de répartition de $X = \frac{-1}{\lambda} \ln(U)$.

   On considère, jusqu'à la fin de l'exercice, une variable aléatoire Y dont la densité f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0. On suppose que $f = 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $f > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que sa fonction de répartition F est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 1[$
3. On pose $F^{-1}(1) = 0$. Déterminer la loi de $F^{-1}(U)$.
4. Déterminer $F^{-1}(U)$ lorsque f est définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Commenter le résultat par rapport à la première question.