Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Le but est de déterminer la limite de $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$ existe et calculer sa valeur.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln\left(\frac{p}{n}\right) = -1$
   Indication : on pourra essayer d'encadrer la somme par une intégrale.
3. Conclure.

Exercice 2

On dit qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ est *sans mémoire* si

$$\forall s,t \geqslant 0, \quad \mathbb{P}(Y > s+t) = \mathbb{P}(Y > s)\mathbb{P}(Y > t)$$

1. Montrer qu'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est sans mémoire.
2. Réciproquement, soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, sans mémoire.
   On note pour tout réel t, $G(t) = \mathbb{P}(Y > t)$.
   (a) Reformuler la propriété d'absence de mémoire à l'aide de G. Montrer que pour tout $t > 0$ et tout entier naturel n, $G(nt) = G(t)^n$.
   (b) En déduire que pour tous entiers $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$, $G\left(\dfrac{p}{q}\right) = G(1)^{p/q}$
   (c) Conclure qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $t > 0$, $G(t) = e^{-\lambda t}$.
   Conclure.