Oral type HEC/ESCP : 30 minutes de préparation.

Exercice 1

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. **Question de cours :** Rappeler la définition et les propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.
2. Déterminer le réel α tel que la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha e^{-|x|}$$
soit une densité de probabilité.

   Dans toute la suite de l'exercice, on donne à α cette valeur.
   On dit qu'une variable aléatoire de densité f suit la Loi de Laplace.
   On se donne une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Laplace.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i)$
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_n de la variable aléatoire Y_n.
   (b) En déduire une densité de Y_n.
   (c) Pour n entier, $n \geqslant 2$, justifier l'existence d'un unique réel a_n tel que $F_n(a_n) = \dfrac{1}{2}$, et le calculer.
   (d) Déterminer $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
4. (a) Justifier, pour tout $w \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(w-t)f(t)dt$$
   (b) Si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_U et f_V, on admet que la variable aléatoire $W = U + V$ a pour densité la fonction définie par :
$$\forall w \in \mathbb{R},\ f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x-t)f_V(t)dt$$
   Déterminer une densité de la variable aléatoire $W = X_1 + X_2$.

Exercice 2 (sans préparation)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$$
Déterminer la nature de la série de terme général u_n.