Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.
   (a) Etudier les variations de la fonction f_n (on discutera selon la parité de n)
   (b) En déduire que l'équation $x^n = e^x$ a une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$ (on rappelle que $e < 3$). On note u_n cette solution.
   (c) Montrer que $u_n > 1$.
   (d) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$.
   (e) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\ln(1+x) = ax + bx^2 + x^2\varepsilon(x)$, où a et b sont deux constantes que l'on déterminera et ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
3. On pose $\forall n \geqslant 3, v_n = u_n - 1$. Montrer que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
4. On pose $\forall n \geqslant 3, w_n = u_n - 1 - \dfrac{1}{n}$. Donner un équivalent de w_n.
   Que vient-on de trouver pour la suite (u_n) ?

Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[, \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire à densité, admettant pour densité f.
   (a) Trouver la fonction de répartition F de X.
   (b) On pose $Y = \ln(X)$. Déterminer la loi de Y.
3. Soit U une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction f_U, définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus D$, où D est un ensemble fini.
   Montrer que $V = e^U$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.