

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

On définit la fonction Tangente Hyperbolique th pour tout réel x par :

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 de $\text{th}(x)$ quand x tend vers 0.
2. Etudier en fonction du réel x , la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, de terme général :

$$u_n = \frac{1}{2^n} \text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

3. Donner la somme $S(x)$ de la série quand elle est existe.
(Indication : on pourra montrer que pour $x \neq 0$,

$$\frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)} = \text{th}(x)$$

4. Etudier la continuité de $x \mapsto S(x)$.

Exercice 2

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{5^x}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{5^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.
(b) Déterminer une densité de X .
2. Soit $n \geq 1$, on définit la variable $Y_n = \text{Ent}(nX)$ (partie entière de nX).
(a) Déterminer les valeurs possibles de Y_n .
(b) Exprimer l'événement $[Y_n = k]$ en fonction d'événements impliquant la variable X .
(c) Déterminer la loi de Y_n .
(d) Déterminer son espérance.