Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Pour tout $n \geqslant 1$ et x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)n\,dt$ est convergente.

   On pose alors $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)n\,dt$.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
3. Montrer qu'il existe un réel k_n, que l'on déterminera, tel que $\varphi_n = k_n f_n$ soit une densité de probabilité. On note X_n une variable aléatoire admettant φ_n comme densité.
4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t k_n f_n(t)dt$ converge si et seulement si $n \geqslant 2$, et donner sa valeur en cas de convergence.
5. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 k_n f_n(t)dt$ converge et donner sa valeur.

Exercice 2

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ lorsque c'est possible.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Pour $y > 0$, on pose $g(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right) - \dfrac{1}{y}$. Effectuer un développement limité à l'ordre 1 de g lorsque y tend vers 0^+.
4. Tracer le graphe de f.