

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Le but est de déterminer la limite de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

1. Montrer que $\int_0^1 \ln(x) dx$ existe et calculer sa valeur.

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln\left(\frac{p}{n}\right) = -1$

Indication : on pourra essayer d'encadrer la somme par une intégrale.

3. Conclure.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^1 t^{t^x} dt$$

1. Que vaut $F(0)$?

2. Rappeler pour $t > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, l'écriture de t^a à l'aide des fonctions exp et ln.

3. On considère, pour x fixé, la fonction $\varphi_x : t \in]0, 1] \mapsto t^{t^x}$.

Etudier φ_x : montrer qu'elle est définie et continue, dresser son tableau de variations, la prolonger par continuité en 0.

4. Montrer que F est définie et croissante sur \mathbb{R} .

5. Calculer la limite de F en $+\infty$ après avoir encadré F .