*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.*

*Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.*

---

## Exercice 1

On veut poser

$$I : x \in [0, +\infty[ \longrightarrow \int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$

1. Montrer que $I$ est bien définie.
2. Déterminer $a$ tel que $f : t \mapsto |\sin(t)| - a$ admette une primitive $F$ telle que $F(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Justifier que $F$ est $\pi$-périodique.
3. En déduire l'équivalent suivante :
$$\int_\pi^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt \underset{x \to +\infty}{\sim} a \ln(x)$$
4. Montrer qu'il existe un réel $b$ tel que, lorsque $x \to +\infty$,
$$I(x) - a\ln(x) - b = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

---

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t \sin(t)}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ u_n = (-1)^{n-1}|u_n|$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 2$,
$$\frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2} \leqslant |u_n| \leqslant \frac{2(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2}$$
*Indication :* on pourra commencer par montrer que $g : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ est décroissante sur un intervalle que l'on précisera.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge mais qu'elle ne converge pas absolument.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{1+t^2}$ converge.