

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ lorsque c'est possible.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Pour $y > 0$, on pose $g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}$. Effectuer un développement limité à l'ordre 1 de g lorsque y tend vers 0^+ .
4. Tracer le graphe de f .

Exercice 2

Soit pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge. En déduire que F est de classe \mathcal{C}^1 et calculer sa dérivée.
2. Calculer les limites de F en 0^+ et $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\left| \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln(x) \right| \leq C$$

En déduire que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$

4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{1}{x} F(x)$.

En déduire que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.